АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Г. М. ВАЙНИККО
А. Ю. ВЕРЕТЕННИКОВ

Итерационные процедуры в некорректных задачах

Ответственный редактор
доктор технических наук
Б. Т. ПОЛЯК

МОСКВА «НАУКА»
1986

УДК 517.94 518.61

Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю. **Итерационные процедуры в некорректных задачах.** М.: Наука, 1986.

В книге с единой точки зрения изучаются различные методы регуляризации линейных некорректных задач. Обсуждается вопрос о выборе параметра регуляризации для итерационных методов. Указан априорный выбор параметра, приводящий к оптимальным по точности методам на классах истокопредставимых решений. В случае апостериорного выбора по принципу невязки получены оптимальные по порядку методы. Исследовано влияние ошибок, в том числе случайных, на каждом шаге итераций.

Для математиков и специалистов в области теории управления, физики и др.

Ил. 2. Библиогр. 93 назв.

Рецензенты

В. К. ИВАНОВ, Р. Ш. ЛИПЦЕР, В. П. ТАНАНА

$\text{В}\ \frac{1502000000-188}{042(02)-86}\ 114\text{-}86\text{—}11$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многие задачи самых разнообразных отраслей физики, теории управления и других наук принадлежат к классу некорректных задач. Это задачи, в которых сколь угодно малые возмущения исходных данных могут вызывать большие изменения результатов. Исходные данные обычно известны приближенно, что значительно усложняет численное решение некорректных задач и интерпретацию получаемых результатов. Математическое толкование некорректных задач и фундамент теории были в начале 60-х годов заложены в работах А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева и В. К. Иванова. К настоящему времени разработаны устойчивые методы решения (методы регуляризации) для разнообразных некорректных задач. Наиболее полно исследованы вариационные методы регуляризации, особенно метод А. Н. Тихонова [72, 43].

В данной монографии акцент делается на итерационные методы регуляризации. Основное внимание уделено исследованию точности и помехоустойчивости методов решения линейных некорректных задач. Обсуждаются различные способы выбора параметра регуляризации (момента останова для итерационных методов). Среди них центральное место занимает принцип невязки: параметр регуляризации (момент останова итераций) подбирается так, чтобы невязка приближенного решения по величине была сравнима с уровнем точности исходных данных задачи. Такой выбор параметра легко реализуется, особенно в итерационных методах, и в рассматриваемых нами ситуациях приводит к результатам, по точности близким к оптимальным.

Основной математический аппарат, используемый в монографии,— теория линейных операторов. В гл. V используются некоторые методы теории вероятностей. В текст включен минимум ссылок, библиографические замечания вынесены в конец книги.

Авторы выражают глубокую благодарность М. А. Красносельскому и всем своим коллегам за помощь и полезные советы.

I глава

НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Корректность или некорректность постановки задачи является одной из основных характеристик математических моделей, используемых при изучении явлений физики, теории управления и других наук. Грубо говоря, задача поставлена корректно, если она разрешима, решение единственно и непрерывно зависит от входных данных задачи, и некорректно поставлена в противном случае. От корректности или некорректности задачи зависит ее дальнейшая математическая обработка. Для корректно поставленной задачи малые ошибки в исходных данных неопасны, ибо они мало влияют на решение. Некорректно поставленные задачи, наоборот, очень чувствительны к погрешностям в исходных данных, и устойчивое относительно них решение — главная проблема. Такая устойчивость достигается регуляризацией задачи. Грубо говоря, регуляризация некорректной задачи — это такое ее включение в параметрическое семейство корректных задач, что при предельном значении параметра получается исходная (некорректная) задача или эквивалентная ей. Часто такое включение удается реализовать итеративным способом. Ниже (разд. 1, 2) даются более четкие определения корректности, некорректности и регуляризации задачи. В разд. 3, 4 обсуждаются проблемы точности методов регуляризации. Данная глава носит вводный характер и в основном содержит известный материал.

1. Некорректно поставленные задачи

1.1. **Понятие некорректно поставленной задачи.** Пусть E и F — метрические пространства, $A : E \to F$ — оператор, действующий из E в F. Рассмотрим уравнение

$$Au=f. \tag{1.1}$$

Задача заключается в отыскании элемента $u \in E$ по элементу $f \in F$, известному, как правило, с некоторой погрешностью.

Задача (1.1) называется корректно поставленной по Адамару или просто корректной на паре пространств E, F, если выполнены следующие три условия: 1) при каждом $f \in F$ существует решение $u \in E$; 2) это решение единственно;

3) решение непрерывно зависит от f: из $f_n \to f$ (по метрике F) следует сходимость соответствующих решений $u_n \to u$ (по метрике E). Если же нарушается любое из перечисленных трех условий, то задача (1.1) называется некорректно поставленной или просто некорректной. Другими словами, задача (1.1) поставлена корректно, если оператор A имеет непрерывный обратный A^{-1}: $F \to E$, и некорректно поставлена в противном случае.

1.2. **Линейные некорректно поставленные задачи.** В дальнейшем мы будем рассматривать только линейные задачи, когда пространства E и F банаховы, а $A \in \mathscr{L}(E, F)$, т. е. A — линейный непрерывный оператор, действующий из E в F. В случае линейной некорректной задачи (1.1) сколь угодно малые возмущения в правой части f могут вызывать сколь угодно большие возмущения решения, если оно вообще существует.

В приложениях типичны задачи (1.1), в которых $\dim E = \infty$ и оператор A вполне непрерывен. Такие задачи некорректны. То же самое можно сказать об уравнении (1.1) с незамкнутой областью значений $\mathscr{R}(A) = AE$ оператора A — нарушены условия 1 и 3. Иногда задача (1.1) с незамкнутой областью значений $\mathscr{R}(A)$ называется существенно некорректно поставленной.

Задача (1.1) с замкнутой областью значений $\mathscr{R}(A)$ называется нормально разрешимой. Нормально разрешимые задачи по ряду свойств более близки к корректным задачам, нежели к задачам с нарушением условия 3 в определении корректности.

1.3. **Интегральные уравнения первого рода** являются типичными примерами некорректных задач. Рассмотрим уравнение **Фредгольма первого рода**

$$(Au)(t) \equiv \int_a^b \mathscr{K}(t, s)\, u(s)\, ds = f(t) \quad (c \leqslant t \leqslant d). \tag{1.2}$$

При естественных ограничениях на ядро $\mathscr{K}(t, s)$, например в случае непрерывного ядра, интегральный оператор A вполне непрерывен как оператор из пространства $C[a, b]$ в пространство $C[c, d]$, и задача (1.2) на этой паре пространств поставлена некорректно; она некорректна и на паре пространств $L^p(a, b)$ и $L^p(c, d)$. Ситуация сходна и в случае многомерных интегральных уравнений первого рода по замкнутым кривым и поверхностям и пр.

В некоторых случаях удается указать пару пространств E и F, на которой задача (1.2) поставлена корректно. Например, уравнение Вольтерра первого рода

$$(Au)(t) \equiv \int_a^t \mathscr{K}(t, s)\, u(s)\, ds = f(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{1.3}$$

корректно поставлено между пространствами $E=C[a, b]$ и $F=C_0^1[a, b]$ — пространством непрерывно дифференцируемых функций $f\in C^1[a, b]$ с $f(a)=0$. С другой стороны, задача (1.3), как и (1.2), некорректна между пространствами $E=C[a, b]$ и $F=C[a, b]$ — это вытекает из полной непрерывности оператора $A\in\mathscr{L}(C, C)$.

Возникает естественный вопрос, нельзя ли для любой задачи подобрать такую пару пространств, на которой задача будет корректной. Ответ следующий. Во-первых, описание таких пар пространств обычно весьма сложно. Уравнение Вольтерра первого рода в этом смысле является счастливым исключением. Так, уравнение Фредгольма первого рода с бесконечно гладким ядром не допускает такого описания. Во-вторых, мы вовсе не свободны в выборе пространств E и F. Выбор пространства F диктуется той метрикой, в которой правая часть уравнения известна с достаточной точностью. Как правило, f получается в результате обработки некоторых измерений и ее погрешность мала в метриках C или L^2, но велика в метриках C^m и $W^{m,2}$. В таких случаях мы вынуждены положить $F=C$ или $F=L^2$. С другой стороны, выбор пространства E диктуется той метрикой, в которой мы желаем приблизить искомое решение, обычно это также метрики C или L^2, но могут быть и метрики C^m, $W^{m,2}$. По этим причинам даже уравнение (1.3) обычно следует решать как некорректное, хотя для него мы и знаем пару пространств, на которой задача корректна.

2. Регуляризатор некорректно поставленной задачи

2.1. **Понятие о регуляризаторе.** Рассмотрим линейную некорректную задачу

$$Au=f, \tag{2.1}$$

где $A\in\mathscr{L}(E, F)$ — линейный непрерывный оператор, E, F — банаховы пространства. Пусть $f\in\mathscr{R}(A)$, т. е. задача (2.1) разрешима. Подпространство $\mathscr{N}(A)=\{u\in E : Au=0\}$ может быть нетривиальным, т. е. содержать ненулевые элементы, и тогда решение уравнения (2.1) не единственно. Множество всех решений обозначим через $A^{-1}f$ (полный прообраз элемента f).

Как правило, в приложениях вместо $f\in\mathscr{R}(A)$ в нашем распоряжении имеется некоторое его приближение $f_\delta\in F$, $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$; при этом f_δ может не принадлежать $\mathscr{R}(A)$. Приближенная задача $Au=f_\delta$ может, таким образом, быть неразрешимой. Но даже если $f_\delta\in\mathscr{R}(A)$, то все равно решение этого уравнения нельзя брать в качестве приближенного решения уравнения (2.1),— это связано с отсутствием непрерывной зависимости решения от правой части. Как быть? Можно ли восстановить решение уравнения (2.1) с приемлемой точностью, если правая часть дана с малой погрешностью? Ответ положителен, если для задачи (2.1) существует регуляризатор.

Регуляризатор задачи (2.1) — это такое однопараметрическое семейство операторов $\mathscr{R}_\delta : F\to E$ $(0<\delta\leqslant\delta_0)$, что для каждого $f\in\mathscr{R}(A)$

$$\sup_{f_\delta\in F,\|f_\delta-f\|\leqslant\delta}\ \inf_{u\in A^{-1}f}\|\mathscr{R}_\delta f_\delta-u\|\to 0 \quad \text{при } \delta\to 0.$$

Регуляризатор называется непрерывным, линейным и т. д., если каждый оператор $\mathscr{R}_\delta$ $(0<\delta\leqslant\delta_0)$ непрерывен, линеен и т. д. Задача (2.1) называется регуляризуемой (непрерывно регуляризуемой, линейно регуляризуемой), если для нее существует хотя бы один регуляризатор (непрерывный регуляризатор, линейный регуляризатор). Наличие регуляризатора позволяет при любом $f\in\mathscr{R}(A)$, известном приближенно с точностью δ $(\|f_\delta-f\|\leqslant\delta)$, восстановить точное решение u в пределе при $\delta\to\to 0$. В реальных задачах, хотя δ и мало, как правило, предельный переход $\delta\to 0$ неосуществим. Тем не менее есть надежда, что $\mathscr{R}_\delta f_\delta$ будет хорошим приближеинем к точному решению. Поэтому построение регуляризаторов некорректных задач представляет не только большой теоретический интерес, но и дает ключ к устойчивому решению таких задач.

Известны примеры интегральных уравнений вида (1.2) с гладким ядром, для которых в случае $E=C[a, b]$, $F=L^2(c, d)$ не существует регуляризатора (пример Л. Д. Менихеса [55]). Существуют также нерегуляризуемые уравнения с $E=F=C[a, b]$. С другой стороны, если пространство E рефлексивно (например $E=L^p(a, b)$ с $1<p<\infty$), то задача (2.1) непрерывно регуляризуема (см., например, [62]). В случае, когда E и F гильбертовы, задача (2.1) линейно и непрерывно регуляризуема. Целый класс таких регуляризаторов указывается в гл. III.

2.2. **Случай неточно заданного оператора.** Более тщательный анализ некорректных задач требует учета неточностей и в операторе A, возникающих из-за неточностей математической модели описываемых явлений и в результате погрешности дискретизации в стадии подготовки к решению задачи на ЭВМ. Итак, вместо «точного» уравнения (2.1) с $f\in\mathscr{R}(A)$ мы имеем в своем распоряжении некоторое возмущенное уравнение $A_\eta u=f_\delta$. Чтобы не осложнять анализ, будем всегда предполагать, что оператор $A_\eta\in\mathscr{L}(E, F)$ действует между теми же пространствами E и F, что и точный оператор A, причем $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$, $\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$, где δ и η — малые положительные числа. Здесь возможны и другие подходы, основанные на понятии дискретной сходимости (см. [17]).

Пусть $\mathfrak{A}\subseteq\mathscr{L}(E, F)$ — некоторый класс операторов, куда входят A и A_η. Назовем $\mathfrak{A}$-регуляризатором такое двупараметрическое семейство операторов $\mathscr{R}_{\delta\eta} : F\times\mathfrak{A}\to E$ $(0<\delta\leqslant\delta_0,\ 0<<\eta\leqslant\eta_0)$, что для всякого $A\in\mathfrak{A}$ и каждого $f\in\mathscr{R}(A)$

$$\sup_{\substack{f_\delta\in F, A_\eta\in\mathfrak{A}\\ \|f_\delta-f\|\leqslant\delta, \|A_\eta-A\|\leqslant\eta}}\ \inf_{u\in A^{-1}f}\|\mathscr{R}_{\delta\eta}(f_\delta, A_\eta)-u\|\to 0 \quad \text{при } \delta\to 0,\ \eta\to 0.$$

Если $\mathfrak{A}$ состоит только из одного оператора A, то это определение возвращает нас к понятию регуляризатора задачи (2.1) в смысле п. 2.1. Наиболее интересен случай $\mathfrak{A}=\mathcal{L}(E, F)$. Оказывается, что если банахово пространство E рефлексивно, то существует непрерывный $\mathcal{L}(E, F)$-регуляризатор. Конкретные $\mathfrak{A}$-регуляризаторы будут построены в гл. IV для случая гильбертовых пространств E и F.

3. Оптимальные и оптимальные по порядку методы

3.1. **Понятия оптимальных и оптимальных по порядку методов.** Любое отображение $\mathcal{P}: F \to E$ может трактоваться как метод решения задачи (2.1): он сопоставляет правой части $f_\delta \in F$ ($\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$) элемент $\mathcal{P} f_\delta \in E$, который принимается за приближенное решение уравнения. От отображения $\mathcal{P}$ не требуется ни линейности, ни непрерывности. Столь общее понимание метода полезно тогда, когда речь идет о сравнении точности всевозможных способов решения задачи (2.1). Точность метода $\mathcal{P}$ на множестве $\mathcal{M} \subset E$ характеризуется наибольшим отклонением

$$\varphi(\delta;\ \mathcal{M};\ \mathcal{P}) = \sup_{f_\delta \in F,\, u \in \mathcal{M},\, \|f_\delta - Au\| \leqslant \delta} \|\mathcal{P} f_\delta - u\|. \tag{3.1}$$

Метод $\mathcal{P}_\delta: F \to E$ называется оптимальным (по точности) на $\mathcal{M}$, если

$$\varphi(\delta;\ \mathcal{M};\ \mathcal{P}_\delta) = \inf_{\mathcal{P}} \varphi(\delta;\ \mathcal{M};\ \mathcal{P}); \tag{3.2}$$

асимптотически оптимальным на $\mathcal{M}$, если

$$\lim_{\delta \to 0} \{\varphi(\delta;\ \mathcal{M};\ \mathcal{P}_\delta) / \inf_{\mathcal{P}} \varphi(\delta;\ \mathcal{M};\ \mathcal{P})\} = 1;$$

оптимальным по порядку на $\mathcal{M}$, если

$$\varphi(\delta;\ \mathcal{M};\ \mathcal{P}_\delta) \leqslant c \inf_{\mathcal{P}} \varphi(\delta;\ \mathcal{M};\ \mathcal{P}), \quad 0 < \delta \leqslant \delta_0, \quad c = \text{const}$$

(инфимум берется по всем методам).

3.2. **Оценки наибольшего отклонения.** Теорема 3.1 (см. [43]). Для всякого метода $\mathcal{P}$ и любого центрально-симметричного ограниченного множества $\mathcal{M} \subset E$ имеет место неравенство

$$\varphi(\delta;\ \mathcal{M};\ \mathcal{P}) \geqslant \omega(\delta;\ \mathcal{M}), \tag{3.3}$$

где

$$\omega(\delta;\ \mathcal{M}) = \sup_{u \in \mathcal{M},\, \|Au\| \leqslant \delta} \|u\|. \tag{3.4}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, а $\tilde{u} \in \mathcal{M}$ таково, что $\|A\tilde{u}\| \leqslant \delta$, $\|\tilde{u}\| \geqslant \omega(\delta;\ \mathcal{M}) - \varepsilon$. Ввиду центральной симметрии $\mathcal{M}$

имеем также $-\tilde{u}\in\mathscr{M}$ и, сузив в (3.1) супремум по $u\in\mathscr{M}$ до максимума по $\tilde{u}$ и $-\tilde{u}$, получим

$$\varphi(\delta;\ \mathscr{M};\ \mathscr{P})\geqslant\max\left\{\sup_{\substack{f_\delta\\ \|f_\delta-A\tilde{u}\|\leqslant\delta}}\|\mathscr{P}f_\delta-\tilde{u}\|,\quad\sup_{\substack{f_\delta\\ \|f_\delta+A\tilde{u}\|\leqslant\delta}}\|\mathscr{P}f_\delta+\tilde{u}\|\right\}.$$

Далее, полагая $f_\delta=0$, получим

$$\varphi(\delta;\ \mathscr{M};\ \mathscr{P})\geqslant\max\{\|\mathscr{P}0-\tilde{u}\|,\ \|\mathscr{P}0+\tilde{u}\|\}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(\|\mathscr{P}0-\tilde{u}\|+\|\mathscr{P}0+\tilde{u}\|)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\|(\mathscr{P}0-\tilde{u})-(\mathscr{P}0+\tilde{u})\|=\|\tilde{u}\|\geqslant\omega(\delta;\ \mathscr{M})-\varepsilon,$$

что в силу произвольности ε и доказывает теорему 3.1.

Обозначим $\mathscr{N}(f,\delta)=\{u\in E:\ \|Au-f\|\leqslant\delta\}$.

Лемма 3.1. Пусть множество $\mathscr{M}\subset E$ центрально-симметрично, выпукло и ограниченно. Тогда для всякого $f\in F$, для которого $\mathscr{M}\cap\mathscr{N}(f,\ \delta)$ непусто, выполняется следующее неравенство диаметров:

$$\operatorname{diam}[\mathscr{M}\cap\mathscr{N}(f,\ \delta)]\leqslant\operatorname{diam}[\mathscr{M}\cap\mathscr{N}(0,\ \delta)].\tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть u_1, $u_2\in\mathscr{M}\cap\mathscr{N}(f,\ \delta)$ таковы, что $\|u_1-u_2\|\geqslant\operatorname{diam}[\mathscr{M}\cap\mathscr{N}(f,\ \delta)]-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$. Ввиду центральной симметрии $\mathscr{M}$ имеем $-u_1\in\mathscr{M}$, $-u_2\in\mathscr{M}$, а ввиду выпуклости $\mathscr{M}$ также $v_1\equiv(u_1-u_2)/2\in\mathscr{M}$, $v_2\equiv(u_2-u_1)/2\in\mathscr{M}$. Далее, из u_1, $u_2\in\mathscr{N}(f,\ \delta)$ следует $\|Av_1\|=\|(Au_1-f)-(Au_2-f)\|/2\leqslant(\|Au_1-f\|+\|Au_2-f\|)/2\leqslant\delta$, т. е. v_1, $v_2\in\mathscr{N}(0,\ \delta)$. Таким образом, v_1, $v_2\in\mathscr{M}\cap\mathscr{N}(0,\ \delta)$ и $\operatorname{diam}[\mathscr{M}\cap\mathscr{N}(0,\ \delta)]\geqslant\|v_1-v_2\|=\|u_1-u_2\|\geqslant\operatorname{diam}[\mathscr{M}\cap\mathscr{N}(f,\ \delta)]-\varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon>0$ отсюда получаем (3.5). Лемма 3.1 доказана.

Заметим, что $\mathscr{M}\cap\mathscr{N}(0,\ \delta)$ центрально-симметрично и выпукло вместе с $\mathscr{M}$ и

$$\operatorname{diam}[\mathscr{M}\cap\mathscr{N}(0,\ \delta)]=2\omega(\delta;\ \mathscr{M}).\tag{3.6}$$

Теорема 3.2. Для любого центрально-симметричного выпуклого ограниченного множества $\mathscr{M}\subset E$ имеет место неравенство

$$\inf_{\mathscr{P}}\varphi(\delta;\ \mathscr{M};\ \mathscr{P})\leqslant 2\omega(\delta;\ \mathscr{M}).\tag{3.7}$$

Доказательство. Возьмем любой такой метод $\mathscr{P}$, что в случае непустого $\mathscr{M}\cap\mathscr{N}(f_\delta,\ \delta)$ элемент $\mathscr{P}f_\delta$ принадлежит этому множеству. Тогда по лемме 3.1

$$\varphi(\delta;\ \mathscr{M};\ \mathscr{P})=\sup_{f_\delta\in F,\,u\in\mathscr{M},\,\|Au-f_\delta\|\leqslant\delta}\|\mathscr{P}f_\delta-u\|=$$
$$=\sup_{f_\delta:\ \mathscr{M}\cap\mathscr{N}(f_\delta,\delta)\neq\varnothing}\ \sup_{u\in\mathscr{M}\cap\mathscr{N}(f_\delta,\delta)}\|\mathscr{P}f_\delta-u\|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{f_\delta:\ \mathscr{M}\cap\mathscr{N}(f_\delta,\delta)\neq\varnothing}\operatorname{diam}[\mathscr{M}\cap\mathscr{N}(f_\delta,\ \delta)]\leqslant$$
$$\leqslant\operatorname{diam}[\mathscr{M}\cap\mathscr{N}(0,\ \delta)]=2\omega(\delta;\ \mathscr{M}).$$

Теорема 3.2 доказана.

3.3. **Равномерная сходимость методов на $\mathscr{M}$.** Для оптимального по порядку на выпуклом, центрально-симметричном множестве $\mathscr{M}$ метода $\mathscr{P}_\delta : F \to E$ имеем (см. (3.3) и (3.7))

$$\omega(\delta; \mathscr{M}) \leqslant \sup_{u \in \mathscr{M}, f_\delta \in F, \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta} \|\mathscr{P}_\delta f_\delta - u\| \leqslant 2c\omega(\delta; \mathscr{M}).$$

Если $\omega(\delta; \mathscr{M}) \to 0$ при $\delta \to 0$, то такие методы будут равномерно сходиться на $\mathscr{M}$. Широко известна

Теорема 3.3. Пусть $\mathscr{M} \cap \mathscr{N}(A) = 0$ и $\mathscr{M} \subset E$ компактно, т. е. замкнуто, и любая последовательность элементов из $\mathscr{M}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Тогда $\omega(\delta; \mathscr{M}) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Важным примером центрально-симметричных выпуклых ограниченных множеств являются множества вида

$$\mathscr{M}_B = \{u \in E \colon\ u = Bv,\ \|v\| \leqslant 1\}, \tag{3.8}$$

где $B \in \mathscr{L}(G, E)$ — некоторый линейный непрерывный оператор из некоторого банахова пространства G в E. Если пространство G рефлексивно, то $\mathscr{M}_B$ будет и замкнутым; если к тому же $B \in \mathscr{L}(G, E)$ вполне непрерывен, то $\mathscr{M}_B$ будет компактным. Элементарно доказывается

Лемма 3.2. Для сходимости $\omega(\delta; \mathscr{M}_B) \to 0$ при $\delta \to 0$ необходимо, а в случае рефлексивного пространства G и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия: 1) $\mathscr{R}(B) \cap \mathscr{N}(A) = 0$; 2) из слабой сходимости $v_n \dashrightarrow 0$ в G и сильной сходимости $ABv_n \to 0$ в F вытекает сильная сходимость $Bv_n \to 0$ в E.

Теорема 3.4. Пусть оператор $A \in \mathscr{L}(E, F)$ вполне непрерывен и пространство G рефлексивно. Тогда для сходимости $\omega(\delta; \mathscr{M}_B) \to 0$ при $\delta \to 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия: 1) $\mathscr{R}(B) \cap \mathscr{N}(A) = 0$; 2) оператор $B \in \mathscr{L}(G, E)$ вполне непрерывен.

Доказательство немедленно вытекает из леммы 3.2, второе условие которой ввиду полной непрерывности оператора AB (оператора A) принимает следующий вид: если $v_n \dashrightarrow 0$, то $Bv_n \to 0$. В случае рефлексивного пространства G это равносильно полной непрерывности оператора B. Теорема 3.4 доказана.

3.4. **Достаточное условие оптимальности метода по порядку.** Следующая элементарная теорема оказывается весьма удобной при проверке конкретных методов решения уравнения (2.1) на оптимальность по порядку.

Теорема 3.5. Пусть $\mathscr{M} \subset E$ — центрально-симметричное выпуклое ограниченное множество, а метод $\mathscr{P}_\delta : F \to E$ таков, что для каждого $f_\delta \in F$, для которого непусто множество $\{u \in \mathscr{M} : \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta\}$, выполняются соотношения

$$\mathscr{P}_\delta f_\delta \in c_1 \cdot \mathscr{M}, \quad \|A(\mathscr{P}_\delta f_\delta) - f_\delta\| \leqslant c_2 \delta \quad (c_1 \geqslant 0,\ c_2 \geqslant 0). \tag{3.9}$$

Тогда этот метод оптимален по порядку на $\mathscr{M}$:

$$\varphi(\delta; \mathscr{M}; \mathscr{P}_\delta) \leqslant [1 + \max\{c_1, c_2\}] \inf_{\mathscr{P}} \varphi(\delta; \mathscr{M}; \mathscr{P}). \tag{3.10}$$

Доказательство. Имеем (см. (3.1))

$$\varphi(\delta;\ \mathscr{M};\ \mathscr{P}_\delta)=\sup_{f_\delta:\ \mathscr{M}\cap\mathscr{N}(f_\delta,\delta)\neq\varnothing}\ \sup_{u\in\mathscr{M}\cap\mathscr{N}(f_\delta,\delta)}\|\mathscr{P}_\delta f_\delta-u\|.$$

Здесь в силу (3.9) $\mathscr{P}_\delta f_\delta-u\in(c_1+1)\mathscr{M}$,

$$\|A(\mathscr{P}_\delta f_\delta-u)\|\leqslant\|A(\mathscr{P}_\delta f_\delta)-f_\delta\|+\|Au-f_\delta\|\leqslant(c_2+1)\delta,$$

поэтому (см. (3.4))

$$\varphi(\delta;\ \mathscr{M};\ \mathscr{P}_\delta)\leqslant\omega((c_2+1)\delta,\quad(c_1+1)\mathscr{M})\leqslant\omega(c\delta,\ c\mathscr{M}),$$
$$c=1+\max\{c_1,\ c_2\}.$$

Остается заметить, что $\omega(c\delta;\ c\mathscr{M})=c\omega(\delta;\ \mathscr{M})$ при $c>0$, и воспользоваться неравенством (3.3). Теорема 3.5 доказана.

3.5. **Случай приближенно заданного оператора.** Рассмотрим теперь случай, когда оператор A в уравнении (2.1) также известен лишь приближенно и вместо $A\in\mathscr{L}(E,\ F)$ в нашем распоряжении некоторое его приближение $A_\eta\in\mathscr{L}(E,\ F)$, $\|A_\eta-A\|\leqslant\leqslant\eta$. Под методом решения уравнения (2.1) в таком случае естественно понимать любое отображение (ср. с п. 3.1) $\mathcal{G}:F\times\times\mathfrak{A}\to E$, $\mathfrak{A}\subseteq\mathscr{L}(E,\ F)$, сопоставляющее приближенным данным f_δ и A_η ($\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$, $\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$) некоторый элемент $\mathcal{G}(f_\delta,\ A_\eta)\in\in E$, который трактуется как приближенное решение уравнения (2.1). Здесь $\mathfrak{A}$ – некоторое множество операторов, содержащее оператор A. Точность метода $\mathcal{G}$ на множестве $\mathscr{M}\in E$ охарактеризуем наибольшим отклонением

$$\psi(\delta,\ \eta;\ \mathscr{M};\ \mathcal{G})=\sup_{\substack{u\in\mathscr{M},\,f_\delta\in F,\,A_\eta\in\mathfrak{A}\\ \|A_\eta-A\|\leqslant\eta,\,\|A_\eta u-f_\delta\|\leqslant\delta+b_{\mathscr{M}}\eta}}\|\mathcal{G}(f_\delta,\ A_\eta)-u\|,\qquad(3.11)$$

где

$$b_{\mathscr{M}}=\sup_{u\in\mathscr{M}}\|u\|.\qquad(3.12)$$

Метод $\mathcal{G}_{\delta\eta}:F\times\mathfrak{A}\to E$ называется $\mathfrak{A}$-оптимальным на $\mathscr{M}$, если

$$\psi(\delta,\ \eta;\ \mathscr{M};\ \mathcal{G}_{\delta\eta})=\inf_{\mathcal{G}}\psi(\delta,\ \eta;\ \mathscr{M};\mathcal{G});$$

асимптотически $\mathfrak{A}$-оптимальным на $\mathscr{M}$, если

$$\lim_{\delta\to0,\eta\to0}\{\psi(\delta,\ \eta;\ \mathscr{M};\ \mathcal{G}_{\delta\eta}/\inf_{\mathcal{G}}\psi(\delta,\ \eta;\ \mathscr{M};\ \mathcal{G})\}=1;$$

$\mathfrak{A}$-оптимальным по порядку на $\mathscr{M}$, если

$$\psi(\delta,\ \eta;\ \mathscr{L};\ \mathcal{G}_{\delta\eta})\leqslant c\inf_{\mathcal{G}}\psi(\delta,\ \eta;\ \mathscr{M};\ \mathcal{G}),\quad 0<\delta\leqslant\delta_0,\ 0<\eta\leqslant\eta_0$$

(инфимум берется по всем методам $\mathcal{G}:F\times\mathfrak{A}\to E$).

Теорема 3.6. Пусть $\mathscr{M}\subset E$ – центрально-симметричное ограниченное выпуклое множество. Тогда

$$\omega(\delta+b_{\mathscr{M}}\eta;\ \mathscr{M})\leqslant\inf_{\mathcal{G}}\psi(\delta,\ \eta;\ \mathscr{M};\ \mathcal{G})\leqslant2\omega(\delta+2b_{\mathscr{M}}\eta;\ \mathscr{M}),\qquad(3.13)$$

где $\omega(\delta;\ \mathscr{M})$ – определенная в (3.4) функция.

Доказательство. Докажем левое неравенство (3.13). Допустим противное: для некоторого метода $\mathcal{G}: F\times\mathfrak{A}\to E$ имеем $\psi(\delta,\ \eta;\ \mathscr{M};\ \mathcal{G})<\omega(\delta+b_{\mathscr{M}}\eta;\ \mathscr{M})$. Положив в (3.11) $A_\eta=A$, получаем, в частности,

$$\sup_{\substack{u\in\mathscr{M},\, f_\delta\in F\\ \|Au-f_\delta\|\leqslant\delta+b_{\mathscr{M}}\eta}} \|\mathcal{G}(f_\delta,\ A)-u\|<\omega(\delta+b_{\mathscr{M}}\eta;\ \mathscr{M}).$$

Но $\mathscr{P}=\mathcal{G}(\cdot,\ A): F\to E$ является методом в смысле п. 3.1, и последнее неравенство противоречит теореме 3.1.

Докажем правое неравенство (3.13). Введем подмножество методов вида $\mathcal{G}(f_\delta,\ A_\eta)=\mathscr{P}f_\delta$, $\mathscr{P}: F\to E$, постоянных относительно $A_\eta\in\mathfrak{A}$. Имеем

$$\begin{aligned}\inf_{\mathcal{G}}\psi(\delta,\ \eta;\ \mathscr{M};\ \mathcal{G})&\leqslant\inf_{\mathscr{P}}\sup_{\substack{u\in\mathscr{M},\, f_\delta\in F,\, A_\eta\in\mathfrak{A}\\ \|A_\eta-A\|\leqslant\eta,\, \|A_\eta u-f_\delta\|\leqslant\delta+b_{\mathscr{M}}\eta}}\|\mathscr{P}f_\delta-u\|\leqslant\\ &\leqslant\inf_{\mathscr{P}}\sup_{\substack{u\in\mathscr{M},\, f_\delta\in F\\ \|Au-f_\delta\|\leqslant\delta+2b_{\mathscr{M}}\eta}}\|\mathscr{P}f_\delta-u\|=\inf_{\mathscr{P}}\varphi(\delta+2b_{\mathscr{M}}\eta;\ \mathscr{M};\ \mathscr{P})\leqslant\\ &\leqslant 2\omega(\delta+2b_{\mathscr{M}}\eta;\ \mathscr{M})\end{aligned}$$

(мы сузили множество, по которому берется инфимум, затем расширили множество, по которому берется супремум, и, наконец, применили теорему 3.2). Теорема 3.6 доказана.

Теорема 3.7. Пусть $\mathscr{M}\subset E$ — центрально-симметричное выпуклое ограниченное множество, а метод $\mathcal{G}_{\delta\eta}: F\times\mathfrak{A}\to E$ таков, что для любого $A_\eta\in\mathfrak{A}$ ($\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$) и любого $f_\delta\in F$, для которого непусто множество $\{u\in\mathscr{M}:\ \|A_\eta u-f_\delta\|\leqslant\delta+b_{\mathscr{M}}\eta\}$, выполняются соотношения

$$u_{\delta\eta}\equiv\mathcal{G}_{\delta\eta}(f_\delta,\ A_\eta)\in c_1\mathscr{M},\ \|A_\eta u_{\delta\eta}-f_\delta\|\leqslant c_2(\delta+b_{\mathscr{M}}\eta),\quad c_1,\ c_2\geqslant 0. \tag{3.14}$$

Тогда этот метод $\mathfrak{A}$-оптимален по порядку на $\mathscr{M}$:

$$\psi(\delta,\ \eta;\ \mathscr{M};\ \mathcal{G}_{\delta\eta})\leqslant[1+\max\{c_1,\ c_2\}]\inf_{\mathcal{G}}\psi(\delta,\ \eta;\ \mathscr{M};\ \mathcal{G}). \tag{3.15}$$

Доказательство. При фиксированном A_η ($A_\eta\in\mathfrak{A}$, $\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$) имеем дело с методом в смысле п. 3.1 и из условий (3.14) на основе теоремы 3.5 получаем

$$\begin{aligned}&\sup_{u\in\mathscr{M},\, f_\delta\in F,\, \|A_\eta u-f_\delta\|\leqslant\delta+b_{\mathscr{M}}\eta}\|\mathcal{G}_{\delta\eta}(f_\delta,\ A_\eta)-u\|\leqslant\\ &\qquad\leqslant[1+\max\{c_1,\ c_2\}]\inf_{\mathcal{G}}\sup_{u\in\mathscr{M},\, f_\delta\in F,\, \|A_\eta u-f_\delta\|\leqslant\delta+b_{\mathscr{M}}\eta}\|\mathcal{G}(f_\delta,\ A_\eta)-u\|.\end{aligned}$$

Беря верхнюю грань по A_η, приходим к (3.15). Теорема 3.7 доказана.

3.6. **Другое определение оптимальности.** В основу определения (3.11) наибольшего отклонения метода $\mathcal{G}: F\times\mathscr{L}(E,\ F)\to E$ бралось следующее наблюдение: для точных $A \in \mathscr{L}(E, F)$ и $u \in \mathcal{M}$ найдутся такие $A_\eta \in \mathscr{L}(E, F)$ и $f_\delta \in F$, что $\|A_\eta - A\| = \eta$, $\|f_\delta - Au\| = \delta$, $\|A_\eta u - f_\delta\| = \delta + \|u\|\eta$. Действительно, по известному следствию теоремы Хана — Банаха существует такой линейный непрерывный функционал $u^* \in E^*$ (E^* — сопряженное к E пространство), что $\|u^*\| = 1$, $\langle u, u^* \rangle = \|u\|$. Указанным выше требованиям удовлетворяют $A_\eta = A + \eta \langle \cdot, u^* \rangle u / \|u\|$, $f_\delta = Au - \delta u / \|u\|$.

Возможны другие определения наибольшего отклонения метода на множестве [43]:

$$\psi_1(\delta, \eta; \mathcal{M}; \mathcal{A}) = \sup_{\substack{u \in \mathcal{M}, f_\delta \in F, A \in \mathscr{L}(E,F) \\ \|A - A_\eta\| \leqslant \eta, \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta}} \|\mathcal{A}(f_\delta, A_\eta) - u\|. \tag{3.16}$$

Эта характеристика замечательна тем, что она полностью определена заданием множества $\mathcal{M} \subset E$ и оператора $A_\eta \in \mathscr{L}(E, F)$; по оператору A проводится варьирование. Из (3.13) и результатов [43] следует, что для множеств типа (3.8) $c_0 \inf\limits_{\mathcal{A}} \psi(\delta, \eta; \mathcal{M}_B; \mathcal{A}) \leqslant \inf\limits_{\mathcal{A}} \psi_1(\delta, \eta; \mathcal{M}_B; \mathcal{A}) \leqslant c \inf\limits_{\mathcal{A}} \psi(\delta, \eta; \mathcal{M}_B; \mathcal{A})$. Понятия оптимальных по порядку методов, соответствующих характеристикам ψ и ψ_1, совпадают; понятия оптимальности и асимптотической оптимальности различаются.

4. Случай класса истокопредставимых решений

4.1. Условия оптимальности. Продолжим изучение точностных характеристик методов решения линейной некорректно поставленной задачи

$$Au = f. \tag{4.1}$$

Здесь и ниже на протяжении всей книги будем считать, что $A \in \mathscr{L}(H, F)$ — линейный непрерывный оператор из гильбертова пространства H в гильбертово пространство F. Введем множество

$$\mathcal{M}_{p\rho} = \{u \in H : u = |A|^p v, \quad v \in H, \ \|v\| \leqslant \rho\}, \quad p > 0, \ \rho > 0. \tag{4.2}$$

Здесь $|A| = (A^*A)^{1/2} \in \mathscr{L}(H, H)$ — самосопряженный неотрицательный оператор (модуль оператора A), $A^* \in \mathscr{L}(F, H)$ — сопряженный к $A \in \mathscr{L}(H, F)$ оператор. Элементы вида $u = |A|^p v$ принято называть истокопредставимыми порядка p; $p > 0$ может быть дробным. Учитывая, что $\|Aw\| = \||A|w\|$, имеем (см. (3.4))

$$\omega(\delta; \mathcal{M}_{p\rho}) = \sup_{u \in \mathcal{M}_{p\rho}, \|Au\| \leqslant \delta} \|u\| = \sup_{\|v\| \leqslant \rho, \||A|^{p+1} v\| \leqslant \delta} \||A|^p v\|.$$

Если B — самосопряженный неотрицательный (не обязательно ограниченный) оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве, то для любых p и q $(0 \leqslant p \leqslant q)$ и любого u из области определения оператора B^q имеет место так называемое неравенство моментов [47] $\|B^p u\| \leqslant \|B^q u\|^{p/q} \|u\|^{1-(p/q)}$.

Если u — собственный элемент оператора B ($Bu=\lambda u$), то $\|B^p u\|=\|B^q u\|^{p/q}\|u\|^{1-(p/q)}$.

При помощи неравенства моментов с оператором $B=|A|$ находим $\omega(\delta;\ \mathcal{M}_{p\rho})\leqslant\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}$. Если $|A|v=\lambda v$, $\lambda=(\delta/\rho)^{1/(p+1)}$, $\|v\|=\rho$, то $\||A|^{p+1}v\|=\lambda^{p+1}\|v\|=\delta$ и

$$\omega(\delta;\ \mathcal{M}_{p\rho})=\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}. \tag{4.3}$$

Если λ принадлежит не точечному, а непрерывному спектру оператора $|A|$, то существует такая последовательность v_n, что $\|v_n\|=\rho$, $|A|v_n-\lambda v_n\to 0$ при $n\to\infty$, и мы снова приходим к равенству (4.3). В итоге для выполнения (4.3) достаточно, чтобы точка $(\delta/\rho)^{1/(p+1)}$ принадлежала спектру $\sigma(|A|)$ оператора $|A|$. Подчеркнем, что для существенно некорректных задач нуль является точкой сгущения для $\sigma(|A|)$, поэтому существует по крайней мере счетное множество значений $\delta=\delta_n\to 0$, для которых справедливо равенство (4.3).

Теорема 3.1 в данной ситуации принимает следующую форму: для всякого метода $\mathcal{P}$ решения задачи (4.1) имеет место неравенство

$$\varphi(\delta;\ \mathcal{M}_{p\rho};\ \mathcal{P})\geqslant\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)} \tag{4.4}$$

по крайней мере при тех $\delta>0$, для которых $(\delta/\rho)^{1/(p+1)}\in\sigma(|A|)$. В п. 1.5 гл. III будет указан некоторый метод $\overline{\mathcal{P}}_\delta$, для которого

$$\varphi(\delta;\ \mathcal{M}_{p\rho};\ \overline{\mathcal{P}}_\delta)\leqslant\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}. \tag{4.5}$$

Значит, при указанных δ

$$\inf_{\mathcal{P}}\varphi(\delta;\ \mathcal{M}_{\rho};\ \mathcal{P})=\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}. \tag{4.6}$$

Отсюда получаем следствия: если для некоторого метода $\mathcal{P}_\delta$

$$\varphi(\delta;\ \mathcal{M}_{p\rho};\ \mathcal{P}_\delta)\leqslant c\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)},\quad 0<\delta\leqslant\delta_0,\quad c=\mathrm{const},$$

то такой метод оптимален по порядку на $\mathcal{M}_{p\rho}$; если же

$$\lim_{\delta\to 0}\rho^{-1/(p+1)}\delta^{-p/(p+1)}\varphi(\delta;\ \mathcal{M}_{p\rho};\ \mathcal{P}_\delta)\leqslant 1,$$

то такой метод асимптотически оптимален на $\mathcal{M}_{p\rho}$; наконец, если

$$\varphi(\delta;\ \mathcal{M}_{p\rho};\ \mathcal{P}_\delta)\leqslant\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)},$$

то метод оптимален на $\mathcal{M}_{p\rho}$. Равенство (4.6) и следствия из него заменой $u'=u-u_0$ распространяются и на множества вида

$$\mathcal{M}_{p\rho u_0}=\{u\in H:\ u-u_0=|A|^p v,\quad v\in H,\quad \|v\|\leqslant\rho\}, \tag{4.7}$$

симметричные относительно некоторой точки $u_0\in H$.

4.2. **Случай приближенно заданного оператора.** В случае приближенно заданного оператора A из (4.3) и (3.13) вытекает (см. также (3.12)), что для всякого метода $\mathscr{Q}: F\times\mathfrak{A}\to H$ $(A\in\mathfrak{A}\subseteq\mathscr{L}(H, F))$ выполняется неравенство

$$\psi(\delta, \eta; \mathscr{M}_{p\rho}; \mathscr{Q}) \geqslant \rho^{1/(p+1)}(\delta + b_{p\rho}\eta)^{p/(p+1)}, \quad b_{p\rho} = \|A\|^p\rho. \tag{4.8}$$

Эта оценка распространяется и на множества $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$ (см. (4.7)):

$$\psi(\delta, \eta; \mathscr{M}_{p\rho u_0}; \mathscr{Q}) \geqslant \rho^{1/(p+1)}(\delta + b_{p\rho}\eta)^{p/(p+1)}. \tag{4.9}$$

Каждый метод $\mathscr{Q}_{\delta\eta}$, для которого

$$\psi(\delta, \eta; \mathscr{M}_{p\rho u_0}; \mathscr{Q}_{\delta\eta}) \leqslant c_{p\rho}(\delta + \eta)^{p/(p+1)} \quad (0 < \delta \leqslant \delta_0,\ 0 < \eta \leqslant \eta_0),$$

$\mathfrak{A}$-оптимален по порядку на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$.

В отличие от (4.8) оценка (4.9) груба, так как

$$\sup_{u\in\mathscr{M}_{p\rho u_0}} \|u\| = \|u_0\| + \|A\|^p\rho > b_{p\rho} \quad \text{при } u_0 \neq 0.$$

2 глава

КЛАСС МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Объектом исследования данной книги является некоторый класс методов устойчивого решения линейных некорректных задач в гильбертовых пространствах. Этот класс содержит ряд широко используемых в вычислительной практике методов, например методы А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, и различные итерационные методы. Мы начнем с рассмотрения этих конкретных методов (разд. 1, 2) и установим для них некоторые общие свойства в виде оценок на порождающие функции. Постулируя затем подобные свойства, выделим общий класс методов (разд. 3).

1. Методы М. М. Лаврентьева и А. Н. Тихонова и их итерированные варианты

1.1. **Решаемая задача и ее симметризация.** Пусть H и F — гильбертовы пространства, $A\in\mathscr{L}(H, F)$, т. е. A — линейный непрерывный оператор из H в F; мы не требуем замкнутости области значений $\mathscr{R}(A)$ или тривиальности нулевого подпространства $\mathscr{N}(A)$. Таким образом, задача

$$Au=f, \tag{1.1}$$

о методах решения которой будет идти речь, вообще говоря, некорректна.

Применяя к обеим частям уравнения (1.1) сопряженный к A оператор $A^*\in\mathscr{L}(F, H)$, приходим к уравнению

$$A^*Au=A^*f \tag{1.2}$$

(симметризация Гаусса). Оператор $A^*A\in\mathscr{L}(H, H)$ самосопряжен и неотрицателен. Обозначим через Q ортопроектор на $\overline{\mathscr{R}(A)}\subseteq F$ (замыкание $\mathscr{R}(A)$).

Предложение 1.1. *Множества решений уравнения (1.2) и уравнения*

$$Au=Qf \tag{1.3}$$

совпадают.

Доказательство. Пусть уравнение (1.2) имеет решение u_*, т. е. $A^*Au_*=A^*f$. Тогда $\langle Au_*-f, Av\rangle=0\ \forall v\in H$, т. е. Au_*-f

ортогонален $\mathscr{R}(A)$, а значит, и $\overline{\mathscr{R}(A)}$. Поэтому $Q(Au_*-f)=0$, а поскольку $QA=A$, то $Au_*=Qf$, т. е. u_* – решение уравнения (1.3).

Пусть теперь, наоборот, уравнение (1.3) имеет решение $u_*\in H$, т. е. $Au_*=Qf$. Поскольку $A^*Q=A^*$, то применение оператора A^* дает $A^*Au_*=A^*f$, т. е. u_* – решение уравнения (1.2). Предложение 1.1 доказано.

Решения уравнения (1.2) будем называть квазирешениями или решениями в смысле наименьших квадратов уравнения (1.1). Последнее название связано с тем, что решения уравнения (1.2) (уравнения (1.3)) минимизируют функционал $\Phi(u)\equiv\|Au-f\|^2=\|Au-Qf\|^2+\|f-Qf\|^2$, $u\in H$. Из предложения 1.1 следует, что в случае $f\in\mathscr{R}(A)$ множество квазирешений уравнения (1.1) совпадает с множеством его решений. Если $f\overline{\in}\mathscr{R}(A)$, $Qf\in\mathscr{R}(A)$, то уравнение не имеет решения, но имеет квазирешение. Если $Qf\overline{\in}\mathscr{R}(A)$, то уравнение не имеет даже квазирешения. В случае $f\in\mathscr{R}(A)$ особый интерес представляет решение задачи (1.1) наименьшей нормы, называемое нормальным решением. Нормальное решение ортогонально $\mathscr{N}(A)$. Аналогично в случае $Qf\in\mathscr{R}(A)$ особый интерес представляет квазирешение уравнения (1.1) наименьшей нормы; оно называется псевдорешением или нормальным квазирешением. С понятием псевдорешения связано понятие псевдообратного A^+ к оператору A. Его можно определить как оператор, сопоставляющий любому $f\in F$, для которого $Qf\in\mathscr{R}(A)$, псевдорешение A^+f уравнения (1.1). Оператор A^+ линеен, но ограничен он тогда и только тогда, когда $\mathscr{R}(A)\subseteq F$ замкнуто.

1.2. **Симметризация интегральных уравнений первого рода.** Рассмотрим уравнение Фредгольма первого рода

$$(Au)(t)\equiv\int_a^b\mathscr{K}(t,s)\,u(s)\,ds=f(t)\quad(c\leqslant t\leqslant d)\tag{1.4}$$

с вполне непрерывным оператором из $H=L^2(a,b)$ в $F=L^2(c,d)$. Сопряженный к нему оператор A^T действует из $F=L^2(c,d)$ в $H=L^2(a,b)$ по формуле

$$(A^Tf)(s)=\int_c^d\overline{\mathscr{K}(t,s)}\,f(t)\,dt,\tag{1.5}$$

где черта над $\mathscr{K}(t,s)$ означает комплексное сопряжение. Симметризация Гаусса уравнения (1.4) примет вид

$$A^TAu=A^Tf,\tag{1.6}$$

или

$$\int_c^d\overline{\mathscr{K}(t,s)}\int_a^b\mathscr{K}(t,\sigma)\,u(\sigma)\,d\sigma dt=\int_c^d\overline{\mathscr{K}(t,s)}\,f(t)\,dt\quad(a\leqslant s\leqslant b).$$

Простейшая симметризация (1.6) хороша не во всех ситуациях. Если о решении уравнения (1.4) известно, что оно имеет суммируемые в квадрате производные до порядка m ($m\geqslant 1$) включительно, и если мы хотим построить к нему гладкое приближение (методами, описываемыми в дальнейшем), то целесообразно рассматривать оператор уравнения (1.4) действующим из $H=W^{m,2}(a, b)$ в $F=L^2(c, d)$. Мы изменили только пространство, в котором ищется решение; пространство $F=L^2(c, d)$ осталось прежним — в приложениях правая часть уравнения (1.4), как правило, известна с хорошей точностью в среднеквадратичной норме. Сопряженный с $A\in\mathscr{L}(W^{m,2}(a, b), L^2(c, d))$, оператор $A^*\in\mathscr{L}(L^2(c, d), W^{m,2}(a, b))$ имеет вид (см. (1.5))

$$A^*=JA^T, \tag{1.7}$$

где $J\in\mathscr{L}(L^2(a, b), W^{m,2}(a, b))$ — оператор, сопряженный к оператору вложения $W^{m,2}$ в L^2:

$$\langle v, w\rangle_{L^2}=\langle v, Jw\rangle_{W^{m,2}} \quad \forall v\in W^{m,2}, \quad w\in L^2. \tag{1.8}$$

Действительно, (1.7) немедленно следует из (1.8):

$$\langle Au, v\rangle_{L^2} =\langle u, A^Tv\rangle_{L^2} =\langle u, JA^Tv\rangle_{W^{m,2}} \qquad \forall u\in W^{m,2},\ v\in L^2.$$

Симметризация Гаусса интегрального уравнения (1.4) примет вид

$$JA^TAu\doteq JA^Tf. \tag{1.9}$$

Структура оператора J зависит от формы скалярного произведения в $W^{m,2}$, которое можно определить по-разному. Если положить

$$\langle u, w\rangle_{W^{m,2}} = \int\limits_a^b [u^{(m)}(t)\overline{v^{(m)}(t)} + u(t)\overline{v(t)}]\, dt, \tag{1.10}$$

то $J=L^{-1}$, где L — дифференциальный оператор

$$Lu=(-1)^m u^{(2m)}+u, \quad u^{(k)}(a)=u^{(k)}(b)=0 \quad (k=m, \ldots, 2m-1); \tag{1.11}$$

область определения $\mathscr{D}(L)$ оператора L состоит из функций $u\in W^{2m,2}(a, b)$, удовлетворяющих указанным в (1.11) граничным условиям. Действительно, (1.8) будет выполнено с $J=L^{-1}$, если $\langle v, Lu\rangle_L{}^2=\langle v, u\rangle_{W_{m,2}}\ \forall v\in W^{m,2}$, $u\in\mathscr{D}(L)$. Последнее равенство проверяется интегрированием по частям; при этом внеинтегральные члены аннулируются за счет граничных условий. Если положить

$$\langle u, v\rangle_{W^{m,2}} = \sum_{j=0}^{m} \int\limits_a^b q_j(t)\, u^{(j)}(t)\, \overline{v^{(j)}(t)}\, dt, \tag{1.12}$$

где веса $q_j(t)$ неотрицательны и j раз непрерывно дифференцируемы, $q_0(t)>0$, $q_m(t)>0$, то снова $J=L^{-1}$, но теперь дифференциальный оператор L имеет вид

$$Lu=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}\left(q_k(t)\frac{d^ku}{dt^k}\right),$$

$$\sum_{k=j}^{m}(-1)^k\frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}}(q_k(t)u^{(k)}(t))\big|_{t=a}=0,$$

$$\sum_{k=j}^{m}(-1)^k\frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}}(q_k(t)u^{(k)}(t))\big|_{t=b}=0\quad(j=1,\ \dots,\ m).\tag{1.13}$$

В частности, при $m=1$

$$Lu=-\frac{d}{dt}\left(q_1(t)\frac{du}{dt}\right)+q_0(t)u(t),\qquad u'(a)=u'(b)=0;$$

при $m=2$

$$Lu=\frac{d^2}{dt^2}\left(q_2(t)\frac{d^2u}{dt^2}\right)-\frac{d}{dt}\left(q_1(t)\frac{du}{dt}\right)+q_0(t)u(t),$$

$$u''(a)=u''(b)=0,\quad q_2(a)u'''(a)-q_1(a)u'(a)=0,$$

$$q_2(b)u'''(b)-q_1(b)y'(b)=0.$$

1.3. Метод М. М. Лаврентьева и его итерированный вариант. Метод М. М. Лаврентьева применяют для решения некорректно поставленных задач с самосопряженными неотрицательными операторами. Будем считать, что в уравнении (1.1) $H=F$, $A=A^*\geqslant 0$. Метод М. М. Лаврентьева заключается в переходе к регуляризованному уравнению

$$\alpha u+Au=f,\tag{1.14}$$

где α — малый положительный параметр (параметр регуляризации). Обозначая через I тождественный оператор, имеем $\langle(\alpha I+A)u,\ u\rangle\geqslant\alpha\|u\|^2$ $\forall u\in H$, поэтому оператор $\alpha I+A$ обратим, $\|(\alpha I+A)^{-1}\|\leqslant\alpha^{-1}$. Задача (1.14), таким образом, корректна, и некорректная задача (1.1) вкладывается в семейство корректных как предельный случай при $\alpha\to 0$.

Опишем одну итеративную модифакцию метода М. М. Лаврентьева. Зафиксируем натуральное число $m\geqslant 1$. Пусть u_0 — некоторое априори известное приближение к решению уравнения (1.1). Положив $u_{0,\alpha}=u_0$, последовательно вычислим $u_{1,\alpha},\ \dots,\ u_{m,\alpha}$ как решения уравнений

$$\alpha u_{n,\alpha}+Au_{n,\alpha}=\alpha u_{n-1,\alpha}+f\qquad(n=1,\ \dots,\ m).\tag{1.15}$$

В качестве приближенного решения уравнения (1.1) примем элемент $u_{m,\alpha}$. Заметим, что в случае $m=1$, $u_0=0$ мы имеем дело с методом (1.14).

Приближение $u_\alpha=(\alpha I+A)^{-1}f$ минимизирует функционал $\Psi_\alpha(u)=\alpha\|u\|^2+\langle Au,\ u\rangle-\langle u,\ f\rangle-\langle f,\ u\rangle$.

К интегральному уравнению

$$(Au)(t)=\int\limits_a^b \mathcal{K}(t, s)\, u(s)\, ds = f(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{1.16}$$

метод М. М. Лаврентьева и его итерированный вариант применимы, если ядро $\mathcal{K}(t, s)$ симметрично ($\mathcal{K}(t, s)=\overline{\mathcal{K}(s, t)}$) и все собственные значения оператора A неотрицательны; тогда оператор A самосопряжен и неотрицателен в пространстве $H=L^2(a, b)$. Методом М. М. Лаврентьева интегральное уравнение (1.16) включается в параметрическое семейство интегральных уравнений второго рода

$$\alpha u(t)+\int\limits_a^b \mathcal{K}(t, s)\, u(s)\, ds = f(t), \quad \alpha > 0. \tag{1.17}$$

1.4. **Метод А. Н. Тихонова и его итерированный вариант.** Метод А. Н. Тихонова применим к задаче (1.1) в ее общей постановке (без условия самосопряженности). Простейший вариант метода А. Н. Тихонова заключается в отыскании точки минимума функционала $\Phi_\alpha(u)=\alpha\|u\|_H^2+\|Au-f\|_F^2$, $u \in H$, где α — малый положительный параметр. Эта задача на минимум равносильна определению u из уравнения

$$\alpha u+A^*Au=A^*f. \tag{1.18}$$

Наряду с описанным вариантом метода А. Н. Тихонова (1.18) можно применять его итерированный вариант. Зададим начальное приближение $u_{0,\alpha}=u_0 \in H$ и натуральное число $m \geqslant 1$ и последовательно вычислим $u_{1,\alpha}, \ldots, u_{m,\alpha}$ по формулам

$$\alpha u_{n,\alpha}+A^*Au_{n,\alpha}=\alpha u_{n-1,\alpha}+A^*f \qquad (n=1, \ldots, m); \tag{1.19}$$

элемент $u_{m,\alpha}$ примем за приближенное решение уравнения (1.1).

В применении к интегральному уравнению (1.4) метод А. Н. Тихонова (1.18) принимает различные формы в зависимости от пары пространств H и F, между которыми интегральный оператор A рассматривается. При $H=L^2(a, b)$, $F=L^2(c, d)$ уравнение (1.18) имеет простейший вид $\alpha u+A^TAu=A^Tf$, или в развернутой форме

$$\alpha u(s)+\int\limits_c^d \overline{\mathcal{K}(t, s)} \int\limits_a^b \mathcal{K}(t, \sigma)\, u(\sigma)\, d\sigma dt = \int\limits_c^d \overline{\mathcal{K}(t, s)}\, f(t)\, dt \quad (a \leqslant s \leqslant b).$$

При $H=W^{m,2}(a, b)$, $F=L^2(c, d)$ уравнение (1.18) принимает вид

$$\alpha Lu+A^TAu=A^Tf, \tag{1.20}$$

где $L=J^{-1}$ — дифференциальный оператор порядка $2m$ с $2m$ граничными условиями, форма которых зависит от используемого в

$W^{m,2}$ скалярного произведения. Если оно имеет вид (1.10), то уравнение (1.20) примет вид

$$\alpha\,[(-1)^m u^{(2m)}(s)+u(s)]+\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d \overline{\mathcal{K}(t,s)}\,\mathcal{K}(t,\sigma)\,dt\right]u(\sigma)\,d\sigma=$$
$$=\int\limits_c^d \overline{\mathcal{K}(t,s)}\,f(t)\,dt \quad (a\leqslant s\leqslant b),\quad u^{(k)}(a)=u^{(k)}(b)=0$$
$$(k=m,\ \dots,\ 2m-1). \tag{1.21}$$

1.5. **Порождающая система функций методов М. М. Лаврентьева и А. Н. Тихонова.** Рассмотрим сперва случай $H=F$, $A=A^*\geqslant 0$ и метод М. М. Лаврентьева (1.14). Решение уравнения (1.14) можно выразить в форме $u_\alpha=(\alpha I+A)^{-1}f=g_\alpha(A)f$, где

$$g_\alpha(\lambda)=(\alpha+\lambda)^{-1},\quad 0\leqslant\lambda<\infty. \tag{1.22}$$

Индукцией по m легко проверить, что приближение $u_{m,\alpha}$, найденное по итерированному варианту метода М. М. Лаврентьева (1.15), представимо в виде $u_{m,\alpha}=(I-Ag_{m,\alpha}(A))u_0+g_{m,\alpha}(A)f$, где оператор $g_{m,\alpha}(A)$ построен по функции

$$g_{m,\alpha}(\lambda)=\sum_{j=0}^{m-1}(1-\lambda g_\alpha(\lambda))^j g_\alpha(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\,[1-(1-\lambda g_\alpha(\lambda))^m], \tag{1.23}$$

или с учетом (1.22)

$$g_{m,\alpha}(\lambda)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\alpha^j}{(\alpha+\lambda)^{j+1}}=\frac{1}{\lambda}\left[1-\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^m\right],\quad 0\leqslant\lambda<\infty. \tag{1.24}$$

Снимем теперь условия самосопряженности задачи (1.1) и рассмотрим метод А. Н. Тихонова для него. Решение уравнения (1.18) дается формулой $u_\alpha=(\alpha I+A^*A)^{-1}A^*f=g_\alpha(A^*A)A^*f$, а решение уравнения (1.19) — формулой $u_{m,\alpha}=(I-A^*Ag_{m,\alpha}(A^*A))u_0+$ $+g_{m,\alpha}(A^*A)A^*f$, где $g_\alpha(\lambda)$ и $g_{m,\alpha}(\lambda)$ — определенные в (1.22) и (1.24) функции.

Систему функций $g_\alpha(\lambda)$, $\alpha>0$, назовем *порождающей* для методов М. М. Лаврентьева (1.14) и метода А. Н. Тихонова (1.18), а систему функций $g_{m,\alpha}(\lambda)$, $\alpha>0$,— порождающей для итерированных вариантов (1.15) и (1.19) указанных методов.

Лемма 1.1. Для системы функций $g_\alpha(\lambda)=(\alpha+\lambda)^{-1}$, $\alpha>0$, справедливы соотношения

$$g_\alpha(\lambda)\geqslant 0,\qquad 0\leqslant 1-\lambda g_\alpha(\lambda)=\alpha g_\alpha(\lambda)\qquad (0\leqslant\lambda<\infty), \tag{1.25}$$

$$\sup_{0\leqslant\lambda<\infty} g_\alpha(\lambda)=\alpha^{-1},\qquad \sup_{0\leqslant\lambda<\infty}\lambda^{1/2}g_\alpha(\lambda)=\frac{1}{2}\,\alpha^{-1/2}, \tag{1.26}$$

$$\sup_{0\leqslant\lambda<\infty}\lambda^p\,(1-\lambda g_\alpha(\lambda))=p^p\,(1-p)^{1-p}\alpha^p\quad (0\leqslant p\leqslant 1). \tag{1.27}$$

Доказательство основано на элементарных вычислениях.

Лемма 1.2. Для системы функций $g_{m,\alpha}(\lambda)$, $\alpha>0$, определенных в (1.24), справедливы соотношения

$$g_{m,\alpha}(\lambda)\geqslant 0, \quad 0\leqslant 1-\lambda g_{m,\alpha}(\lambda)\leqslant \frac{\alpha}{m}\, g_{m,\alpha}(\lambda) \quad (0\leqslant\lambda<\infty), \qquad (1.28)$$

$$\sup_{0\leqslant\lambda<\infty} g_{m,\alpha}(\lambda)=m\alpha^{-1}, \qquad \sup_{0\leqslant\lambda<\infty} \lambda^{1/2} g_{m,\alpha}(\lambda)\leqslant m^{1/2}\alpha^{-1/2}, \qquad (1.29)$$

$$\sup_{0\leqslant\lambda<\infty} \lambda^{p}(1-\lambda g_{m,\alpha}(\lambda))=\left(\frac{p}{m}\right)^{p}\left(1-\frac{p}{m}\right)^{m-p}\alpha^{p} \quad (0\leqslant p\leqslant m). \qquad (1.30)$$

Доказательство. Ясно, что $g_{m,\alpha}(\lambda)\geqslant 0$, $0\leqslant \leqslant 1-\lambda g_{m,\alpha}(\lambda)\leqslant 1$, и с учетом (1.25) получаем

$$1-\lambda g_{m,\alpha}(\lambda)=(1-\lambda g_{\alpha}(\lambda))^{m}=(1--\lambda g_{\alpha}(\lambda))\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}(1-\lambda g_{\alpha}(\lambda))^{m-1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{m}\, g_{\alpha}(\lambda)\sum_{j=0}^{m-1}(1-\lambda g_{\alpha}(\lambda))^{j}=\frac{\alpha}{m}\, g_{m,\alpha}(\lambda).$$

Неравенства (1.28) установлены.

Первое из неравенств (1.29) очевидно, а второе доказывается так:

$$\lambda^{1/2} g_{m,\alpha}(\lambda)=[1-(1-\lambda g_{m,\alpha}(\lambda))]^{1/2}\,[g_{m,\alpha}(\lambda)]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant[g_{m,\alpha}(\lambda)]^{1/2}\leqslant(m/\alpha)^{1/2}.$$

Поскольку $\lambda^{p}(1-\lambda g_{m,\alpha}(\lambda))=[\lambda^{p/m}(1-\lambda g_{\alpha}(\lambda))]^{m}$, то из (1.27) немедленно вытекает (1.30). Лемма 1.2 доказана.

1.6. **Случай задачи с самосопряженным знакопеременным оператором.** Рассмотрим снова задачу (1.1) с $H=F$, $A=A^{*}$, но в отличие от п. 1.3 мы теперь не предполагаем неотрицательности оператора A. Конечно, такую задачу, как всякую другую линейную задачу, можно решать методом А. Н. Тихонова (1.18). Однако здесь применима и следующая модификация метода М. М. Лаврентьева: приближенное решение u_{α} уравнения (1.1) определим из уравнения

$$\mathrm{i}\alpha u+Au=f, \quad \alpha>0, \quad \mathrm{i}=\sqrt{-1}. \qquad (1.31)$$

Можно применять итерированный вариант метода: по $u_{0,\alpha}=u_{0}\in H$ последовательно вычисляем $u_{1,\alpha},\ \ldots,\ u_{m,\alpha}$ как решения уравнений

$$\mathrm{i}\alpha u_{n,\alpha}+Au_{n,\alpha}=\mathrm{i}\alpha u_{n-1,\alpha}+f \quad (n=1,\ \ldots,\ m). \qquad (1.32)$$

Приближения u_{α} и $u_{m,\alpha}$, найденные из (1.31) и (1.32), опять представимы в виде $u_{\alpha}=g_{\alpha}(A)f$, $u_{m,\alpha}=(I-Ag_{m,\alpha}(A))u_{0}+g_{m,\alpha}(A)f$, по-иному выглядят лишь порождающие системы функций:

$$g_{\alpha}(\lambda)=(\alpha\mathrm{i}+\lambda)^{-1}, \quad -\infty<\lambda<\infty,$$

$$g_{m,\alpha}(\lambda)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(\alpha\mathrm{i})^{j}}{(\alpha\mathrm{i}+\lambda)^{j+1}}=\frac{1}{\lambda}\left[1-\left(\frac{\alpha\mathrm{i}}{\alpha\mathrm{i}+\lambda}\right)^{m}\right], \quad -\infty<\lambda<\infty;$$

остается в силе и соотношение (1.23).

Лемма 1.3. Для указанных порождающих систем функций

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty} |g_\alpha(\lambda)| = \alpha^{-1}, \qquad \sup_{-\infty<\lambda<\infty} |g_{m,\alpha}(\lambda)| = m\alpha^{-1}, \tag{1.33}$$

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty} |\lambda|^p |1-\lambda g_\alpha(\lambda)| = [p^p(1-p)^{1-p}]^{1/2} \alpha^p \quad (0\leqslant p\leqslant 1), \tag{1.34}$$

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty} |\lambda|^p |1-\lambda g_{m,\alpha}(\lambda)| = \left[\left(\frac{p}{m}\right)^p \left(1-\frac{p}{m}\right)^{m-p}\right]^{1/2} \alpha^p$$

$$(0\leqslant p\leqslant m). \tag{1.35}$$

Доказательство. Равенства (1.33) очевидны, (1.34) доказываются непосредственным счетом, а (1.35) получаются из (1.34) аналогично предыдущей лемме. Лемма 1.3 доказана.

В случае вещественного гильбертова пространства H вместо (1.31) можно рекомендовать метод

$$u_\alpha = \mathrm{Re}\, v_\alpha, \qquad v_\alpha = (\mathrm{i}\alpha I + A)^{-1} f \tag{1.36}$$

с использованием комплексного расширения пространства H. Условия (1.36) равносильны условию

$$\alpha^2 u_\alpha + A^2 u_\alpha = Af, \tag{1.37}$$

и их можно трактовать как специальную вычислительную схему метода А. Н. Тихонова (ср. с (1.18)). При малых α вычисления по схеме (1.36), несмотря на выход в комплексное расширение, могут ввиду большей численной устойчивости оказаться более целесообразными, чем вычисления по схеме (1.37). Это связано с неравенствами $\|(i\alpha I + A)^{-1}\| \leqslant \alpha^{-1}$, $\|(\alpha^2 I + A)^{-1}\| \leqslant \leqslant \alpha^{-2}$, которые в случае $0 \in \sigma(A)$ превращаются в равенства.

К интегральному уравнению (1.16) методы (1.31), (1.32) и (1.36) применимы, если ядро $\mathscr{K}(t, s)$ симметрично.

2. Простейшие итерационные методы

2.1. Некоторые итерационные схемы. В предыдущем разделе регуляризация некорректной задачи достигалась ее включением как некоторого предельного случая ($\alpha=0$) в семейство корректно поставленных задач. Теперь обратимся к итерационным методам регуляризации. Параметром регуляризации в них является номер итерации. Дадим описание простейших итерационных методов сперва в самосопряженном случае, когда $H=F$, $A= =A^* \geqslant 0$. Зададимся начальным приближением $u_0 \in H$, его разумно брать ближе к искомому точному решению задачи (1.1); при отсутствии всякой информации о точном решении можно положить $u_0=0$. По u_0 последовательно вычислим

$$u_n = u_{n-1} - \mu(Au_{n-1} - f), \quad n=1, 2, \ldots \quad (0<\mu<2/\|A\|). \tag{2.1}$$

Здесь μ — постоянная. Вот другая итерационная схема:

$$\alpha n_n + Au_n = \alpha u_{n-1} + f, \; n=1, 2, \ldots \; (\alpha=\mathrm{const}>0); \tag{2.2}$$

каждый шаг итерации заключается в решении корректно поставленной задачи. Постоянная α здесь не обязательно мала, регуляризация достигается за счет многократного итерирования, При меньших α для достижения цели хотя и требуется меньшее число итераций, но сами итерации более трудно осуществить — ухудшается мера устойчивости задачи (2.2). Стоит обратить внимание на формальное сходство итерационного метода (2.2) с итерированным вариантом метода М. М. Лаврентьева (1.15). Однако регуляризация в этих двух методах достигается по-разному: в итерированном варианте метода М. М. Лаврентьева за счет малости α при фиксированном числе итераций, а в итерационном методе (2.2) — за счет большого числа итераций при фиксированном α.

В общем случае несамосопряженной задачи с $A \in \mathscr{L}(H, F)$ предварительно симметризуем задачу (переходим от (1.1) к задаче (1.2)) и затем применим те же итерационные схемы, что и выше. Таким образом, приходим к итерационным схемам

$$u_n = u_{n-1} - \mu A^*(Au_{n-1} - f), \quad n = 1, 2, \ldots \quad (0 < \mu < 2/\|A\|^2) \qquad (2.3)$$

и

$$\alpha u_n + A^*Au_n = \alpha u_{n-1} + A^*f, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (\alpha = \mathrm{const} > 0). \qquad (2.4)$$

В дальнейшем (2.1) и (2.3) будем называть явными итерационными схемами, а (2.2) и (2.4) — неявными.

Посмотрим, как выглядят итерационные схемы (2.3) и (2.4) в применении к интегральному уравнению (1.4). Положив $H = W^{m,2}(a, b)$, $F = L^2(c, d)$ и приняв в $W^{m,2}$ скалярное произведение (1.10), приведем итерации (2.3) и (2.4) к виду краевых задач

$$(-1)^m u_n^{(2m)}(s) + u_n(s) = (-1)^m u_{n-1}^{(2m)}(s) + u_{n-1}(s) -$$
$$- \mu \int_c^d \overline{\mathscr{K}(t, s)} \left[\int_a^b \mathscr{K}(t, \sigma) u_{n-1}(\sigma) d\sigma - f(t) \right] dt \quad (a \leqslant s \leqslant b),$$
$$u_n^{(k)}(a) = u_n^{)k)}(b) = 0 \quad (k = m, \ldots, 2m - 1), \quad n = 1, 2, \ldots$$

и соответственно

$$\alpha [(-1)^m u_n^{(2m)}(s) + u_n(s)] + \int_a^b \left[\int_c^d \overline{\mathscr{K}(t, s)} \mathscr{K}(t, \sigma) dt \right] u_n(\sigma) d\sigma =$$
$$= \alpha [(-1)^m u_{n-1}^{(2m)}(s) + u_{n-1}(s)] + \int_c^d \overline{\mathscr{K}(t, s)} f(t) dt \quad (a \leqslant s \leqslant b),$$
$$u_n^{(k)}(a) = u_n^{(k)}(b) = 0 \quad (k = m, \ldots, 2m - 1), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

2.2. **Непрерывный аналог итерационных методов (мет** **задачи Коши).** Рассмотренные выше итерационные мет можно трактовать как разностные схемы решения задачи

В самосопряженном случае ($H=F$, $A=A^* \geqslant 0$) речь идет о задаче Коши

$$u'(t)+Au(t)=f, \quad u(0)=u_0. \tag{2.5}$$

Пусть τ – шаг по времени, $u_n=u(n\tau)$, $n=0, 1, \ldots$. Аппроксимируя производную $u'(t)$ разделенной разностью $(u_n-u_{n-1})/\tau$, можно написать следующие две разностные схемы для задачи (2.5):

$$\frac{u_n-u_{n-1}}{\tau}+Au_{n-1}=f, \quad n=1, 2, \ldots \quad \text{(явная схема Эйлера)},$$

$$\frac{u_n-u_{n-1}}{\tau}+Au_n=f, \quad n=1, 2, \ldots \quad \text{(неявная схема Эйлера)}.$$

При $\tau=\mu$ явная разностная схема Эйлера превращается в итерационную схему (2.1), а при $\tau=1/\alpha$ неявная разностная схема – в итерационную схему (2.2). В несамосопряженном случае соответствующая итерационным методам (2.3) и (2.4) задача Коши выглядит так:

$$u'(t)+A^*Au(t)=A^*f, \qquad u(0)=u_0. \tag{2.6}$$

Разностные схемы для задач Коши (2.5) и (2.6) могут служить источником и других итерационных методов решения уравнения (1.1). Определенный теоретический интерес представляет и точное решение задач (2.5) и (2.6). В качестве приближенного решения уравнения (1.1) в таком случае берется решение $u(t)$ задачи (2.5) или (2.6); время t играет роль параметра регуляризации.

2.3. **Порождающая система функций итерационных методов.** Выразим u_n через начальное приближение u_0. Индукцией по n легко проверить, что для итераций (2.1)–(2.4) имеем соответственно

$$u_n=(I-\mu A)^n u_0+\sum_{j=0}^{n-1}(I-\mu A)^j \mu f, \tag{2.1'}$$

$$u_n=[\alpha(\alpha I+A)^{-1}]^n u_0+\sum_{j=0}^{n-1}[\alpha(\alpha I+A)^{-1}]^j(\alpha I+A)^{-1}f, \tag{2.2'}$$

$$u_n=(I-\mu A^*A)^n u_0+\sum_{j=0}^{n-1}(I-\mu A^*A)^j \mu A^*f, \tag{2.3'}$$

$$u_n=[\alpha(\alpha I+A^*A)^{-1}]^n u_0+\sum_{j=0}^{n-1}[\alpha(\alpha I+A^*A)^{-1}]^j(\alpha I+A^*A)^{-1}A^*f. \tag{2.4'}$$

Введем функции

$$g_n(\lambda)=g_{n,\mu}(\lambda)=\sum_{j=0}^{n-1}(1-\mu\lambda)^j \mu=\frac{1}{\lambda}[1-(1-\mu\lambda)^n],$$

$$n=1, 2, \ldots . \tag{2.7}$$

Тогда $1-\lambda g_n(\lambda)=(1-\mu\lambda)^n$ и (2.1′) и (2.3′) можно представить в виде

$$u_n=(I-Ag_n(A))u_0+g_n(A)f, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{2.8}$$

$$u_n=(I-A^*Ag_n(A^*A))u_0+g_n(A^*A)A^*f, \quad n=1, 2, \ldots . \tag{2.9}$$

Определенные в (2.7) функции $g_{n,\mu}(\lambda)$ являются порождающими для явных итерационных схем (2.1) и (2.3).

Введем функции

$$g_n(\lambda)=g_{n,\alpha}(\lambda)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\alpha^j}{(\alpha+\lambda)^{j+1}}=\frac{1}{\lambda}\left[1-\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^n\right],$$

$$n=1, 2, \ldots . \tag{2.10}$$

Тогда приближения (2.2′) и (2.4′) тоже запишутся в виде формул (2.8) и (2.9). Определенные в (2.10) функции $g_{n,\alpha}(\lambda)$ являются порождающими для неявных итерационных схем (2.2) и (2.4).

Лемма 2.1. Для определенных в (2.7) функций $g_{n,\mu}(\lambda)$ при условии $\mu\in(0, 2/a)$ справедливы соотношения

$$g_{n,\mu}(\lambda)\geqslant 0 \quad (0\leqslant\lambda\leqslant a;\ n=1, 2, \ldots), \tag{2.11}$$

$$\max_{0\leqslant\lambda\leqslant a} g_{n,\mu}(\lambda)=\mu n, \qquad \max_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^{1/2}g_{n,\mu}(\lambda)\leqslant(\mu n)^{1/2} \quad (n=1, 2, \ldots), \tag{2.12}$$

$$\max_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^p|1-\lambda g_{n,\mu}(\lambda)|\leqslant\gamma_p n^{-p} \quad (n=1, 2, \ldots;\ 0\leqslant p<\infty), \tag{2.13}$$

где

$$\gamma_p=\max\left\{\left(\frac{p}{\mu e}\right)^p,\ a^p\sup_{n\geqslant 1}|1-\mu a|^n n^p\right\}<\infty, \tag{2.14}$$

а в случае $\mu\in(0, 1/a]$

$$\gamma_p=(p/(\mu e))^p. \tag{2.15}$$

В случае $\mu\in(0, 1/a]$, кроме того,

$$0\leqslant 1-\lambda g_{n,\mu}(\lambda)\leqslant(\mu n)^{-1}g_{n,\mu}(\lambda) \quad (0\leqslant\lambda\leqslant a;\ n=1, 2, \ldots). \tag{2.16}$$

Доказательство. При $\lambda\in[0, a]$, $\mu\in(0, 2/a)$ имеем $|1-\mu\lambda|\leqslant 1$, и из (2.7) следуют соотношения (2.11), (2.12). Докажем (2.13). Функция $\varphi_n(\lambda)=\lambda^p|1-\lambda g_{n,\mu}(\lambda)|=\lambda^p|1-\mu\lambda|^n$ обращается при $\lambda=1/\mu$ в нуль, имеет на отрезке $[0, 1/\mu]$ единственную стационарную точку $\lambda=p/(\mu(n+p))$, которая является точкой максимума, а при $\lambda>1/\mu$ стационарных точек нет. Если $\mu\in\in(0, 1/a]$, а $\lambda\in[0, a]$, то $\lambda\leqslant 1/\mu$, поэтому

$$\max_{0\leqslant\lambda\leqslant a}\varphi_n(\lambda)\leqslant\varphi_n\left(\frac{p}{\mu(n+p)}\right)=\left(\frac{p}{\mu}\right)^p\left(\frac{n}{n+p}\right)^{n+p}n^{-p};$$

при $\mu > 1/a$ получаем

$$\max_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} \varphi_n(\lambda) \leqslant \max \left\{ \varphi_n \left(\frac{p}{\mu (n+p)} \right), \ \varphi_n(a) \right\} =$$

$$= \max \left\{ \left(\frac{p}{\mu} \right)^p \left(\frac{n}{n+p} \right)^{n+p} n^{-p}, \ a^p |1 - \mu a|^n \right\}.$$

Для получения оценок $\{(2.13),\ (2.14)\}$ и $\{(2.13),\ (2.15)\}$ остается заметить, что $[n/(n+p)]^{n+p} \leqslant e^{-p}$, или $\ln(n+p) - \ln n \geqslant p/(n+p)$.

Пусть $\mu \in (0,\ 1/a]$. Левое из неравенств (2.16) очевидно, а правое вытекает из следующей выкладки:

$$1 - \lambda g_{n,\mu}(\lambda) = (1 - \mu\lambda)^u \leqslant (1 - \mu\lambda)^{n-1} = \frac{1}{\mu n} \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \mu\lambda)^{n-1} \mu \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu n} \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \mu\lambda)^j \mu = (\mu n)^{-1} g_{n,\mu}(\lambda).$$

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. Для определенных в (2.10) функций справедливы неравенства

$$g_{n,\alpha}(\lambda) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant 1 - \lambda g_{n,\alpha}(\lambda) \leqslant \frac{\alpha}{n} g_{n,\alpha}(\lambda)$$

$$(0 \leqslant \lambda < \infty;\ n = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{2.17}$$

$$\sup_{0 \leqslant \lambda < \infty} g_{n,\alpha}(\lambda) = \frac{n}{\alpha}, \qquad \sup_{0 \leqslant \lambda < \infty} \lambda^{1/2} g_{n,\alpha}(\lambda) \leqslant \left(\frac{n}{\alpha} \right)^{1/2} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{2.18}$$

$$\sup_{0 \leqslant \lambda < \infty} \lambda^p (1 - \lambda g_{n,\alpha}(\lambda)) \leqslant (\alpha p)^p n^{-p} \quad (n > p > 0). \tag{2.19}$$

Эта лемма по существу является переформулировкой леммы 1.2. Лишь для получения оценки (2.19) из (1.30) следует учесть, что $(1 - (p/n))^{n-p} \leqslant 1$.

2.4. **Порождающая система функций непрерывного аналога итерационных методов.** Решение задачи Коши (2.5) дается формулой

$$u(t) = e^{-tA} u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} f ds. \tag{2.20}$$

Обозначим

$$g_t(\lambda) = \int_0^t e^{-(t-s)\lambda} ds = \lambda^{-1} (1 - e^{-t\lambda}), \tag{2.21}$$

тогда $1 - \lambda g_t(\lambda) = e^{-t\lambda}$ и формула (2.20) принимает вид $u(t) =$

$=(I-Ag_t(A))u_0+g_t(A)f$. Решение задачи Коши (2.6) запишется аналогичным образом:

$$u(t)=(I-A^*Ag_t(A^*A))u_0+g_t(A^*A)A^*f. \tag{2.22}$$

Элементарно доказывается

Лемма 2.3. Для определенных в (2.21) функций $g_t(\lambda)$ справедливы соотношения

$$g_t(\lambda)\geqslant 0,\ 0\leqslant 1-\lambda g_t(\lambda)\leqslant t^{-1}g_t(\lambda)\quad (0\leqslant\lambda<\infty;\ t>0), \tag{2.23}$$

$$\sup_{0\leqslant\lambda<\infty} g_t(\lambda)=t,\qquad \sup_{0\leqslant\lambda<\infty}\lambda^{1/2}g_t(\lambda)=\theta t^{1/2}\ (t>0), \tag{2.24}$$

$$\sup_{0\leqslant\lambda<\infty}\lambda^p(1-\lambda g_t(\lambda))=(p/e)^p t^{-p}\quad (t>0;\ 0\leqslant p<\infty), \tag{2.25}$$

где

$$\theta=\sup_{0<\lambda<\infty}\lambda^{-1/2}(\lambda-e^{-\lambda})\approx 0{,}6382. \tag{2.26}$$

3. Класс методов регуляризации

3.1. **Опредение класса методов.** Дадим теперь описание класса методов решения уравнения (1.1), содержащего как частные случаи рассмотренные в разд. 1, 2 методы. Напомним (см. [45]), что вещественнозначная функция $g:[0,a]\to R$ измерима по Борелю, если при каждом $c\in R$ множество $\{\lambda\in[0,a]:g(\lambda)\leqslant\leqslant c\}$ принадлежит σ-алгебре борелевых подмножеств R, т. е. наименьшей σ-алгебре, содержащей все замкнутые подмножества R. Комплекснозначная функция измерима по Борелю, если ее вещественная и мнимая части измеримы по Борелю. В частности, непрерывные и кусочно-непрерывные функции измеримы по Борелю.

Пусть $\{g_r(\lambda)\}_{r\in(0,\infty)}$ — такое семейство измеримых по Борелю вещественно- или комплекснозначных функций на $[0,a]$, что

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}|g_r(\lambda)|\leqslant\gamma r\quad (r>0),\quad \gamma=\mathrm{const}, \tag{3.1}$$

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}\lambda^p|1-\lambda g_r(\lambda)|\leqslant\gamma_p r^{-p}\quad (r>0;\ 0\leqslant p\leqslant p_0;\ p_0>0),$$
$$\gamma_p=\mathrm{const}. \tag{3.2}$$

В случае $H=F$, $A=A^*\geqslant 0$, $\|A\|\leqslant a$ приближенное решение уравнения (1.1) построим в виде

$$u_r=(I-Ag_r(A))u_0+g_r(A)f, \tag{3.3}$$

где $u_0\in H$ — начальное приближение (например, $u_0=0$), $g_r(A)=$ $=\int\limits_0^a g_r(\lambda)\,dP(\lambda)$ — функция g_r от оператора A (см. [5]), $P(\lambda)$ — спектральное семейство проекторов оператора A. Заметим, что измеримость $g_r(\lambda)$ по Борелю обеспечивает ее измеримость относительно всевозможных мер $d\langle P(\lambda)u,\,v\rangle$, $u,\,v\in H$, а ограниченность $g_r(\lambda)$ влечет за собой ограниченность оператора $g_r(A) \in \in \mathscr{L}(H, H)$,

$$\|g_r(A)\| \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |g_r(\lambda)| \leqslant \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} |g_r(\lambda)| \leqslant \gamma r.$$

В случае несамосопряженного оператора $A \in \mathscr{L}(H, F)$ предварительно перейдем от (1.1) к самосопряженной задаче (1.2). При условии $\|A\|^2 \leqslant a$ можно построить приближение

$$u_r = (I - A^* A g_r(A^* A)) u_0 + g_r(A^* A) A^* f. \tag{3.4}$$

Систему функций $\{g_r(\lambda)\}$ назовем **порождающей** для методов (3.3) и (3.4). Важную роль будет играть наибольшее p_0, при котором (3.2) имеет место; назовем это число **квалификацией** методов (3.3) и (3.4). Определенную роль будут играть и постоянные γ и γ_p, а также постоянная γ_*, для которой

$$\sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} \lambda^{1/2} (g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_* r^{1/2} \quad (r > 0). \tag{3.5}$$

Из (3.1) и (3.2) следует $\lambda^{1/2} |g_r(\lambda)| \leqslant [(1+\gamma_0)\gamma r]^{1/2}$, поэтому можно положить, например, $\gamma_* = [(1+\gamma_0)\gamma]^{1/2}$, но, как правило, это грубо. Иногда вместо постоянных γ, γ_* и γ_p будут использованы их асимптотические аналоги

$$\hat{\gamma} = \overline{\lim_{r \to \infty}} \{r^{-1} \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} |g_r(\lambda)|\}, \qquad \hat{\gamma}_* = \overline{\lim_{r \to \infty}} \{r^{-1/2} \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} \lambda^{1/2} |g_r(\lambda)|\},$$

$$\hat{\gamma}_p = \overline{\lim_{r \to \infty}} \{r^p \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} \lambda^p |1 - \lambda g_r(\lambda)|\}. \tag{3.6}$$

Приведем дальнейшие комментарии к условиям (3.1) и (3.2).

1. Из справедливости (3.1) при $p=0$ и $p=p_0$ вытекает его справедливость при всех промежуточных p с $\gamma_p = \gamma_0^{1-(p/p_0)} \gamma_{p_0}^{p/p_0}$ $(0 \leqslant p \leqslant p_0)$.

2. Если (3.1) и (3.2) выполнены для некоторых комплекснозначных функций g_r, то они выполнены и для вещественных частей $\operatorname{Re} g_r$. При переходе от g_r к $\operatorname{Re} g_r$ постоянные γ, γ_* и γ_p уменьшаются, а в некоторых случаях даже повышается квалификация метода.

3. При $\lambda = \mu/r$ из (3.2) получаем $\operatorname{Re} g_r(\mu/r) \geqslant (1 - \gamma_p \mu^{-p}) \mu^{-1} r$ $(\mu > 0,$ $r > 0)$ и, фиксируя достаточно большое μ, видим, что

$$\varkappa_r \equiv \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} |g_r(\lambda)| \geqslant \beta r \quad (r > 0), \quad \beta = \mathrm{const} > 0.$$

Таким образом, условия (3.1) и (3.2) соответствуют такой «нормированной» параметризации семейства $\{g_r\}$, что $\beta r \leqslant \varkappa_r \leqslant \gamma r$ $(r > 0)$, $0 < \beta \leqslant \gamma$. Мы могли бы в основу всех рассмотрений положить более общие условия

$$\varkappa_r \uparrow \infty \quad \text{при } r \to \infty, \qquad \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} \lambda^p |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_p \varkappa_r^{-p} \quad (r > 0;\ 0 \leqslant p \leqslant p_0).$$

Однако такие условия после перепараметризации семейства $(g_r = \tilde{g}_{\varkappa_r})$ переходят в условия (3.1) и (3.2) относительно $\tilde{g}_r$. С другой стороны, в целях сравнения методов желательна одинаковая параметризация порождающей системы функций.

4. Определенное преимущество имеют порождающие системы функций, определенные на $[0, \infty)$. В таком случае при построении приближений (3.3) и (3.4) не надо думать о норме оператора A. Более того, в этом случае метод (3.3) можно применять для решения задачи (1.1) с линейным неограниченным оператором $A=A^*\geqslant 0$, а метод (3.4) — для решения задачи (1.1) с линейным неограниченным замкнутым плотно определенным оператором $A:\mathscr{D}(A)\subset \subset H\to F$ (эти условия обеспечивают существование сопряженного $A^*:\mathscr{D}(A^*)\subset \subset F\to H$ и самосопряженность оператора A^*A). Из (3.1) и (3.2) вытекает, что операторы $A^*Ag_r(A^*A)$ и $g_r(A^*A)A^*$ ограничены: $\|A^*Ag_r(A^*A)\|\leqslant 1+\gamma_0$, $\|g_r(A^*A)A^*\|\leqslant\gamma_*r^{1/2}$. Поэтому эти операторы могут считаться продолженными по непрерывности на все пространство H и соответственно F, и приближение (3.4) можно строить для любых $u_0\in H$, $f\in F$.

3.2. **Обсуждение примеров.** Леммы 1.1, 1.2, 2.1—2.3 говорят о том, что рассмотренные в разд. 2, 3 методы укладываются в рамки п. 3.1. Параметр регуляризации в этих методах по сложившимся традициям был обозначен по-разному. В методе М. М. Лаврентьева $u_\alpha=(\alpha I+A)^{-1}f$ $(A=A^*\geqslant 0,\ \alpha>0)$ и методе А. Н. Тихонова $u_\alpha=(\alpha I+A^*A)^{-1}A^*f$ $(\alpha>0)$ положим $r=\alpha^{-1}$ и переобозначим u_α через u_r. Тогда эти приближения примут форму (3.3) и (3.4) с $u_0=0$; в силу леммы 1.1 порождающая система функций $g_r(\lambda)=(r^{-1}+\lambda)^{-1}$, $r>0$, удовлетворяет условиям (3.1) и (3.2) с $a=\infty$, $\gamma=1$, $\gamma_p=p^p(1-p)^{1-p}$ $(0\leqslant p\leqslant 1)$; кроме того, $\gamma_*=1/2$. Это методы квалификации $p_0=1$. Та же замена $r=\alpha^{-1}$ позволяет интерпретировать лемму 1.2 как результат о том, что итерированный вариант метода М. М. Лаврентьева (1.15) и итерированный вариант метода А. Н. Тихонова (1.19) порождены системой функций $g_{m,r}(\lambda)=\lambda^{-1}[1-(1+r\lambda)^{-m}]$, $r>0$, удовлетворяющей условиям (3.1) и (3.2) с $a=\infty$, $\gamma=m$, $\gamma_p=(p/m)^p(1-(p/m))^{m-p}$ $(0\leqslant p\leqslant m)$. Это методы квалификации $p_0=m$.

В итерационных методах (2.1)—(2.4) параметр r принимает лишь целочисленные значения: $r=n=1, 2, \ldots$. Выразив u_n через u_0, мы придем к формулам (2.8) и (2.9), в которых порождающая система функций $g_n(\lambda)$, $n=1, 2, \ldots$, определена в (2.7) в случае явной и в (2.10) в случае неявной итерационной схемы. Тем самым рассмотренные итерационные методы тоже принадлежат к классу методов (3.3) и (3.4). Лемма 2.1 говорит о том, что в случае явных итерационных схем (2.1) и (2.3) условия (3.1) и (3.2) выполнены с $\gamma=\mu$, $\gamma_*=\mu^{1/2}$, $p_0=\infty$ и γ_p, определенном в (2.14) или (2.15) в зависимости от соотношения между μ и a $(a<\infty)$. Лемма 2.2 говорит о том, что в случае неявных итерационных схем (2.2) и (2.4) условия (3.1) и (3.2) выполнены с $\gamma=\alpha^{-1}$, $\gamma_*=\alpha^{-1/2}$, $\gamma_p=(\alpha p)^p$, $p_0=\infty$ с той оговоркой, что рассматриваются только $n\geqslant p$; в случае конечного a условия (3.1) и (3.2) выполнены для всех $n=1, 2, \ldots$ с $\gamma_p=p^p\max\{a^p, \alpha^p\}$.

Как уже отмечалось, в неявных итерационных методах (2.2) и (2.4) удобно варьировать обоими параметрами n и α. Если положить $r=n/\alpha$, то лемму 2.2 можно интерпретировать так: условия (3.1) и (3.2) выполнены с $\gamma=1$, $\gamma_p=p^p$ с той оговоркой, что делается не менее $\operatorname{int}p$ итераций ($\operatorname{int}p$ — целая часть p).

Квалификация метода будет зависеть от способа варьирования n и α. В частности, $p_0=\infty$, если $n\to\infty$ при $r=n/\alpha\to\infty$.

В непрерывных аналогах (2.5) и (2.6) итерационных методов положим $r=t$ и переобозначим $u_r=u(t)$. Тогда формулы (2.20) и (2.22) перейдут в (3.3) и (3.4); в силу леммы 2.3 порождающая система функций $g_r(\lambda)=\lambda^{-1}(1-e^{-r\lambda})$ удовлетворяет условиям (3.1) и (3.2) с $a=\infty$, $\gamma=1$, $\gamma_*=\theta$, $p_0=\infty$, $\gamma_p=(p/e)^p$ $(0\leqslant p<\infty)$.

3.3. **Один подкласс методов.** Введем иные условия на порождающую систему: функции $g_r(\lambda)$ вещественнозначны, измеримы по Борелю и

$$g_r(\lambda)\geqslant 0,\ 0\leqslant 1-\lambda g_r(\lambda)\leqslant g_r(\lambda)/\varkappa_v, \qquad \varkappa_r=\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} g_r(\lambda), \tag{3.7}$$

$$\beta r\leqslant\varkappa_r\leqslant\gamma r, \quad \beta=\mathrm{const}>0, \quad \gamma=\mathrm{const}\ (r>0). \tag{3.8}$$

Приближенные решения уравнения (1.1) по-прежнему строим по формулам (3.3) и (3.4). Заметим, что из (3.7), (3.8) вытекает (3.2) с $p_0=1$, $\gamma_p=\beta^{-p}$ $(0\leqslant p\leqslant 1)$. Действительно, из (3.7) заключаем, что

$$0\leqslant 1-\lambda g_r(\lambda)\leqslant 1, \quad 0\leqslant\lambda(1-\lambda g_r(\lambda))\leqslant\lambda g_r(\lambda)/\varkappa_r\leqslant 1/\varkappa_r\leqslant\beta^{-1}r^{-1},$$

т. е. (3.2) выполнено при $p=0$ с $\gamma_0=1$ и при $p=1$ с $\gamma_1=\beta^{-1}$. Отсюда следует справедливость (3.2) для промежуточных p с $\gamma_p=\beta^{-p}$. Поскольку в (3.8) содержится и предположение (3.1), то условия (3.7), (3.8) выделяют некоторый подкласс методов по сравнению с основными условиями (3.1), (3.2). Указанному подклассу принадлежат, в частности, методы, обсуждавшиеся в п. 3.2. Подтверждение этому можно найти в леммах 1.1, 1.2 и 2.1 – 2.3. Некоторое исключение составляет лишь явная итерационная схема: для нее условия (3.7) и (3.8) выполнены не при $\mu\in(0,\ 2/a)$, а лишь при $\mu\in(0,\ 1/a]$ (см. формулировку леммы 2.1).

3.4. **Задача с неточными данными.** Наши основные усилия будут направлены на изучение случая с приближенными данными в задаче (1.1): вместо точных $f\in\mathscr{R}(A)$ и $A\in\mathscr{L}(H,\ F)$ в нашем распоряжении некоторые приближения $f_\delta\in F$ и $A_\eta\in\mathscr{L}(H,\ F)$, $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$, $\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$. При построении приближения (ср. с (3.4)) $u_r=(I-A_\eta^*A_\eta g_r(A_\eta^*A_\eta))u_0+g_r(A_\eta^*A_\eta)A_\eta^*f_\delta$ принципиальных трудностей не возникает, так как оператор $A_\eta^*A_\eta$ самосопряжен и неотрицателен. Более осторожным следует быть при построении приближения (ср. с (3.3))

$$u_r=(I-A_\eta g_r(A_\eta))u_0+g_r(A_\eta)f_\delta \tag{3.9}$$

в случае самосопряженной задачи (1.1) с $H=F$, $A=A^*\geqslant 0$. Для построения приближения (3.9) операторы A_η тоже должны быть самосопряженными и неотрицательными (напомним, что функции $g_r(\lambda)$ предполагались определенными на $[0,\ a]$). Обычно аппроксимирующие операторы A_η и бывают самосопряженными ($A_\eta=A_\eta^*$), но не всегда они неотрицательны. Из неравенства

$\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$ и неотрицательности A следует лишь, что $A_\eta \geqslant -\eta I$. Дополнительным огрублением операторов A_η можно эту неприятность преодолеть: вместо A_η можно использовать $A_\eta' = A_\eta + \eta I$, для которых $A_\eta' \geqslant 0$, $\|A_\eta' - A\| \leqslant 2\eta$. Однако такое огрубление операторов A_η можно и не проводить, если функции g_r определены и измеримы по Борелю, каждая на своем отрезке $[-\alpha r^{-1}, a]$, $\alpha > 0$, $a \geqslant \|A_\eta\|$. Тогда приближение (3.9) можно строить для $r \in (0, \alpha/\eta]$, чего вполне достаточно для наших дальнейших целей. В дополнение к (3.1) в таком случае введем условие

$$\sup_{-\alpha r^{-1} \leqslant \lambda \leqslant 0} |g_r(\lambda)| \leqslant \gamma^- r, \quad (r > 0), \quad \gamma^- = \text{const}. \tag{3.10}$$

Из (3.10) следует, что

$$\sup_{-\alpha r^{-1} \leqslant \lambda \leqslant 0} |\lambda|^p |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_p^{-1} r^{-p} \quad (r > 0;\ 0 \leqslant p < \infty), \tag{3.11}$$

$\gamma_p^- = (1 + \alpha\gamma^-)\alpha^p = \text{const}$.

Для методов, обсуждавшихся в п. 3.2, условие (3.10) выполнено.

3.5. **Случай самосопряженной задачи со знакопеременным оператором.** Здесь рассматривается случай $H = F$, $A = A^*$; условие неотрицательности A теперь не налагается. Приближенное решение уравнения (1.1) можно строить по формуле (3.3), если функции $g_r(\lambda)$ определены, ограничены и измеримы по Борелю на некотором отрезке $[-a_0, a]$, $a_0 \geqslant 0$, $a > 0$, содержащем спектр оператора A: $\sigma(A) \subseteq [-a_0, a]$. На функции $g_r: [-a_0, a] \to \mathbf{C}$ естественно наложить условия, аналогичные условиям п. 3.1:

$$\sup_{-a_0 \leqslant \lambda \leqslant a} |g_r(\lambda)| \leqslant \gamma r \quad (r > 0), \quad \gamma = \text{const}, \tag{3.12}$$

$$\sup_{-a_0 \leqslant \lambda \leqslant a} |\lambda|^p |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_p r^{-p} \quad (r > 0;\ 0 \leqslant p \leqslant p_0), \quad \gamma_p = \text{const}. \tag{3.13}$$

В силу леммы 1.3 модификация метода М. М. Лаврентьева (1.31) и итерированный вариант (1.32) принадлежат к классу методов, выделяемых условиями (3.12), (3.13); при этом опять полагаем $r = \alpha^{-1}$.

Аналогом **(2.2) является итерационный** метод

$$\mathrm{i}\alpha u_n + A u_n = \mathrm{i}\alpha u_{n-1} + f, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (\mathrm{i} = \sqrt{-1}), \tag{3.14}$$

в котором $\alpha = \text{const} > 0$ фиксировано. Порождающая система функций имеет вид

$$g_n(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\alpha \mathrm{i})^j}{(\alpha \mathrm{i} + \lambda)^{j+1}} = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \left(\frac{\alpha \mathrm{i}}{\alpha \mathrm{i} + \lambda}\right)^n\right], \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

Положив $r = n$, получаем (3.12), но вместо (3.13) выполняется более слабое условие

$$\sup_{-\infty < \lambda < \infty} |\lambda|^p |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leqslant \gamma_p n^{-p/2} \quad (n = 1, 2, \ldots;\ 0 \leqslant p < \infty). \tag{3.15}$$

Нет естественного аналога и для явной итерационной схемы (2.1), для которого выполнялись бы условия (3.12) и (3.13).

3.6. **Порождение семейства g_r одной функцией g.** Укажем один общий способ построения семейства g_r, удовлетворяющего на $[0, \infty)$ условиям пп. 3.1, 3.3. Пусть $g : [0, \infty) \to R$ или $g : [0, \infty) \to \mathbf{C}$ — ограниченная измеримая по Борелю функция. Положим

$$g_r(\lambda) = rg(r\lambda) \quad (0 \leqslant \lambda < \infty), \quad r > 0. \tag{3.16}$$

Тогда $1 - \lambda g_r(\lambda) = 1 - r\lambda g(r\lambda)$ и условия (3.1) и (3.2) выполнены с $a = \infty$, если

$$\gamma \equiv \sup_{0 \leqslant \lambda < \infty} |g(\lambda)| < \infty, \tag{3.17}$$

$$\gamma_p \equiv \sup_{0 \leqslant \lambda < \infty} \lambda^p |1 - \lambda g(\lambda)| < \infty \quad (0 \leqslant p \leqslant p_0); \tag{3.18}$$

условие (3.5) при этом выполнено с

$$\gamma_* \equiv \sup_{0 \leqslant \lambda < \infty} \lambda^{1/2} |g(\lambda)| < \infty. \tag{3.19}$$

Условия (3.7) и (3.8) выполнены с $a = \infty$, $\beta = \gamma = \varkappa$, если

$$g(\lambda) \geqslant 0, \ 0 \leqslant 1 - \lambda g(\lambda) \leqslant \frac{g(\lambda)}{\varkappa} \quad (0 \leqslant \lambda < \infty),$$
$$\varkappa \equiv \sup_{0 \leqslant \lambda < \infty} g(\lambda) < \infty. \tag{3.20}$$

Аналогично обстоит дело с выполнением основных условий, если семейство функций g_r построено по формуле (ср. с (3.16))

$$g_r(\lambda) = rg(r\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty), \quad r > 0, \tag{3.21}$$

где $g : (-\infty, \infty) \to R$ или $g : (-\infty, \infty) \to \mathbf{C}$ — заданная измеримая по Борелю функция. А именно условия (3.12) и (3.13) выполнены с $a_0 = a = \infty$, если

$$\gamma \equiv \sup_{-\infty < \lambda < \infty} |g(\lambda)| < \infty, \tag{3.22}$$

$$\gamma_p \equiv \sup_{-\infty < \lambda < \infty} |\lambda|^p |1 - \lambda g(\lambda)| < \infty \quad (0 \leqslant p \leqslant p_0). \tag{3.23}$$

Рассмотренные в разд. 1, 2 методы, за исключением итерационных, порождены по схеме (3.16) или (3.21): в методах М. М. Лаврентьева и А. Н. Тихонова $g(\lambda) = (1 + \lambda)^{-1}$, а в их итерированных вариантах $g(\lambda) = \lambda^{-1}[1 - (1 + \lambda)^{-m}]$; в методе (1.31) $g(\lambda) = (i + \lambda)^{-1}$, а в его итерированном варианте (1.32) $g(\lambda) = \lambda^{-1}[1 - \mathrm{i}^m (i + \lambda)^{-m}]$; в непрерывных аналогах (2.5) и (2.6) итерационных методов $g(\lambda) = \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda})$.

В качестве еще одного примера приведем метод спектральной срезки, точнее, два варианта этого метода. В случае $H = F$, $A = A^* \geqslant 0$ приближенные решения задачи (1.1) имеют вид

$$u_r = A^{-1}[I - P(r^{-1})]f, \tag{3.24}$$

$$u_r = A^{-1}[I - P(r^{-1})]f + rP(r^{-1})f, \tag{3.25}$$

где $P(\lambda)$ — спектральное семейство ортопроекторов оператора A; заметим, что A обратим на подпространстве $[I-P(\lambda)]H$, $\lambda>0$. В случае знакопеременного оператора $A=A^*$ приближения строятся в виде

$$u_r=A^{-1}[I-\Pi(r^{-1})]f, \tag{3.26}$$

$$u_r=A^{-1}[I-\Pi(r^{-1})]f+r\Pi(r^{-1})f, \tag{3.27}$$

где $\Pi(\lambda)=P(\lambda)-P(-\lambda)$, $\lambda>0$. Приближения (3.24) и (3.25) имеют вид (3.3) с порождающими системами соответственно

$$g_r(\lambda)=\begin{cases}\lambda^{-1}, & r^{-1}\leqslant\lambda<\infty,\\ 0, & 0\leqslant\lambda<r^{-1}\end{cases} \quad \text{и } g_r(\lambda)=\begin{cases}\lambda^{-1}, & r^{-1}\leqslant\lambda<\infty,\\ r, & 0\leqslant\lambda\leqslant r^{-1}.\end{cases}$$

Обе эти системы функций представимы формулой (3.16) соответственно с

$$g(\lambda)=\begin{cases}\lambda^{-1}, 1\leqslant\lambda<\infty,\\ 0, 0\leqslant\lambda<1\end{cases} \quad \text{и } g(\lambda)=\begin{cases}\lambda^{-1}, 1\leqslant\lambda<\infty,\\ 1, 0\leqslant\lambda<1.\end{cases}$$

Подсчет постоянных (3.17)—(3.19) дает соответственно, $\gamma=\gamma_*=1$, $\gamma_p=1$ $(0\leqslant p<\infty)$, $p_0=\infty$ и $\gamma=\gamma_*=1$, $\gamma_p=p^p(p+1)^{-(p+1)}$ $(0\leqslant p<\infty)$, $p_0=\infty$. Кроме того, для второй из пары функций $g(\lambda)$ выполнено (3.20), поэтому для метода (3.25) выполнены условия (3.7), (3.8).

Аналогично обстоит дело с приближениями (3.26) и (3.27).

3.7. **Другая возможность симметризации несамосопряженной задачи.** Метод (3.4) основан на симметризации Гаусса — от уравнения (1.1) мы перешли к уравнению $A^*Au=A^*f$ с самосопряженным неотрицательным оператором $A^*A\in\mathscr{L}(H, H)$. От уравнения (1.1) можно перейти также к уравнению $AA^*z=f$ с самосопряженным неотрицательным оператором $AA^*\in\mathscr{L}(F, F)$. Соответствующее приближенное решение имеет вид

$$z_r=(I-AA^*g_r(AA^*))z_0+g_r(AA^*)f. \tag{3.28}$$

Приближения (3.4) и (3.28) тесно связаны: если $u_0=A^*z_0$, то $u_r=A^*z_r$ при всех $r>0$. Доказательство вытекает из следующей леммы, которая неоднократно будет использована и в дальнейшем.

Лемма 3.1. Если g — ограниченная измеримая по Борелю функция на $[0, a]$, $A\in\mathscr{L}(H, F)$, $\|A\|^2\leqslant a$, то

$$A^*g(AA^*)=g(A^*A)A^*, \qquad Ag(A^*A)=g(AA^*)A. \tag{3.29}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим отдельно случай непрерывной функции $g(\lambda)$ — доказательство в таком случае особенно прозрачно. Непрерывную функцию можно на конечном отрезке $[0, a]$ с любой степенью точности равномерно аппроксимировать полиномами. Пусть $\varepsilon_n\equiv\max\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant a}|g_n(\lambda)-g(\lambda)|\to0$ при $n\to\infty$, где g_n — некоторые полиномы. Тогда $\|g_n(AA^*)-g(AA^*)\|\leqslant\leqslant\varepsilon_n\to0$, $\|g_n(A^*A)-g(A^*A)\|\leqslant\varepsilon_n\to0$. Для полинома g_n формулы

(3.29) верны, так как

$$A^*(AA^*)^k=(A^*A)^kA^*, \qquad A(A^*A)^k=(AA^*)^kA, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

В пределе при $n\to\infty$ получаем равенства (3.29) и для g.

2. В случае необязательно непрерывной функции g и, возможно, бесконечного отрезка $[0, \infty)$ возьмем за основу полярное разложение операторов A и A^*:

$$A=U(A^*A)^{1/2}=(AA^*)^{1/2}U, \qquad A^*=U^*(AA^*)^{1/2}=(A^*A)^{1/2}U^*. \tag{3.30}$$

Напомним свойства встречающихся в разложении операторов (подробнее о них см. в [44]). Операторы $|A|=(A^*A)^{1/2}\in\mathscr{L}(H, H)$ и $|A^*|=(AA^*)^{1/2}\in\mathscr{L}(F, F)$ самосопряжены и неотрицательны, а оператор $U\in\mathscr{L}(H, F)$ и сопряженный к нему оператор $U^*\in\in\mathscr{L}(F, H)$ обладают свойствами: $\|Uv\|=\|v\|$ для $v\in\overline{\mathscr{R}(A^*)}\subseteq H$, $Uv=0$ для $v\in\mathscr{R}(A^*)^\perp=\mathscr{N}(A)\subseteq H$, $\|U^*z\|=\|z\|$ для $z\in\overline{\mathscr{R}(A)}\subseteq F$, $U^*z=0$ для $z\in\mathscr{R}(A)^\perp=\mathscr{N}(A^*)\subseteq F$ (такие операторы носят название частичных изометрий). Операторы $P=U^*U$ и $Q=UU^*$ являются ортопроекторами на $\overline{\mathscr{R}(A^*)}$ и соответственно на $\overline{\mathscr{R}(A)}$.

Из (3.30) следует, что $UA^*A=AA^*U$, значит, и $UP(\lambda)==Q(\lambda)U$, где $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$—спектральные семейства ортопроекторов операторов A^*A и AA^* соответственно. Из интегральных представлений $g(A^*A)=\int\limits_0^a g(\lambda)dP(\lambda)$ и $g(AA^*)=\int\limits_0^a g(\lambda)dQ(\lambda)$ получаем следующее равенство $Ug(A^*A)=g(AA^*)U$. Применяя к обеим частям равенства оператор $(AA^*)^{1/2}$, получим на основании (3.30) второе из равенств (3.29). Первое из равенств (3.29) следует из второго, если поменять ролями A^* и $A=A^{**}$. Лемма 3.1 доказана.

3.8. **Итеративное повышение квалификации метода.** Высокая квалификация метода является его положительным качеством. Некоторые утверждения о сходимости методов верны лишь при условии, что квалификация метода больше некоторого критического значения (см., например, гл. III, разд. 3). В связи с этим представляют интерес такие модификации исходного метода, которые повышают квалификацию. Ниже описывается одна такая модификация, связанная с итеративным применением метода. Рассмотрим метод (3.3) в условиях (3.1), (3.2). Пусть его квалификация $p_0<\infty$. Зададим натуральное число $m\geqslant 1$ и по начальному приближению $u_{0,r}=u_0\in H$ вычислим m итераций, построенных на основании формулы (3.3):

$$u_{n,r}=I-Ag_r(A))u_{n-1,r}+g_r(A)f, \quad n=1,\ \ldots,\ m. \tag{3.31}$$

Тогда $u_{m,r}$ представляется формулой вида (3.3): $u_{m,r}==(I-Ag_{m,r}(A))u_0+g_{m,r}(A)f$, причем функции

$$g_{m,r}(\lambda)=\sum_{j=0}^{m-1}(1-\lambda g_r(\lambda)^j\bar{g}_r(\lambda)=\lambda^{-1}[1\,(1-\lambda g_r(\lambda))^m] \tag{3.32}$$

удовлетворяют (3.1) и (3.2) при $0\leqslant p\leqslant mp_0$. В самом деле,

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}|g_{m,r}(\lambda)|\leqslant\sum_{j=0}^{m-1}\gamma_0^j\gamma r=\bar{\gamma}r \quad (r>0),$$

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}\lambda^p|1-\lambda g_{m,r}(\lambda)|=\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}\lambda^p|1-\lambda g_r(\lambda)|^m=$$

$$=[\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant m}\lambda^{p/m}|1-\lambda g_r(\lambda)|]^m\leqslant(\gamma_{p/m})^m r^{-p}$$

$$(r>0;\ 0\leqslant p\leqslant mp_0).$$

Итак, m итераций повышают квалификацию метода в m раз.

В случае метода (3.4) итерации выглядят так:

$$u_{n,r}=(I-A^*Ag_r(A^*A))u_{n-1,r}+g_r(A^*A)A^*f,\qquad n=1,\ \dots,\ m. \tag{3.33}$$

Квалификация метода повышается снова в m раз.

Если для базисного метода выполнены условия (3.7), (3.8), то эти условия будут выполнены и для итерированного варианта метода. Действительно, в силу (3.7) функции $g_r(\lambda)$ и $1-\lambda g_r(\lambda)$ своих наибольших значений достигают при $\lambda=0$. Поэтому из (3.32) получаем

$$g_{m,r}(\lambda)\geqslant0,\quad \varkappa_{m,r}\equiv\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}g_{m,r}(\lambda)=m\varkappa_r,$$

$$0\leqslant1-\lambda g_{m,r}(\lambda)=(1-\lambda g_r(\lambda))^m=(1-\lambda g_r(\lambda))\ \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}(1-$$

$$-\lambda g_r(\lambda))^{m-1}\leqslant\frac{g_r(\lambda)}{\varkappa_r}\,\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}(1-\lambda g_r(\lambda))^j=\frac{1}{\varkappa_{m,r}}\,g_{m,r}(\lambda),$$

т. е. функция $g_{m,r}$ тоже удовлетворяет условиям (3.7), (3.8).

Указанный здесь способ повышения квалификации мы уже применяли в случае методов М. М. Лаврентьева и А. Н. Тихонова (см. пп. 1.3, 1.4).

4. Класс итерационных методов

4.1. Основной класс итерационных методов. Дадим описание класса итерационных методов решения уравнения (1.1), содержащего как частные случаи рассмотренные в разд. 2 методы. Пусть $g:[0,a]\to R$ — ограниченная измеримая по Борелю функция. В самосопряженном случае ($H=F$, $A=A^*\geqslant0$, $\|A\|\leqslant a$) итерации строим по формуле

$$u_n=u_{n-1}-g(A)(Au_{n-1}-f),\qquad n=1,\ 2,\ \dots, \tag{4.1}$$

а в случае произвольного оператора $A\in\mathscr{L}(H,\ F)$, $\|A\|^2\leqslant a$

$$u_n=u_{n-1}-g(A^*A)A^*(Au_{n-1}-f),\qquad n=1,\ 2,\ \dots\ . \tag{4.2}$$

Индукцией по n легко проверить, что приближения (4.1) представимы в виде

$$u_n=(I-Ag(A))^n u_0+\sum_{j=0}^{n-1}(I-Ag(A))^j g(A)f,$$

а приближения (4.2) — в виде

$$u_n=(I-A^*Ag(A^*A))^n u_0+\sum_{j=0}^{n-1}(I-A^*Ag(A^*A))^j g(A^*A)A^*f,$$

т. е. они имеют соответственно форму (3.3) и (3.4) с параметром $r=n$ и системой порождающих функций

$$g_n(\lambda)=\sum_{j=0}^{n-1}(1-\lambda g(\lambda))^j g(\lambda)=\lambda^{-1}[1-(1-\lambda g(\lambda))^n],$$
$$n=1,2,\ldots. \tag{4.3}$$

Лемма 4.1. Пусть функция $g:[0,a]\to R$ измерима по Борелю, ограничена и непрерывна в точке $\lambda=0$, причем $g(0)>0$ и

$$\vartheta_\varepsilon\equiv\sup_{\varepsilon\leqslant\lambda\leqslant a}|1-\lambda g(\lambda)|<1\quad\forall\varepsilon\in(0,a). \tag{4.4}$$

Тогда для определенных в (4.3) функций g_n выполнены условия (3.1) и (3.2) с $p_0=\infty$, причем

$$\gamma=\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}g(\lambda),\quad\gamma_0=1, \tag{4.5}$$

$$\hat{\gamma}\equiv\overline{\lim_{n\to\infty}}\{n^{-1}\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}|g_n(\lambda)|\}=g(0), \tag{4.6}$$

$$\hat{\gamma}_*\equiv\overline{\lim_{n\to\infty}}\{n^{-1/2}\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}\lambda^{1/2}|g_n(\lambda)|\}=\theta[g(0)]^{-1/2}, \tag{4.7}$$

$$\theta\equiv\sup_{0<\lambda<\infty}\lambda^{-1/2}(1-e^{-\lambda})\approx 0{,}6382,$$

$$\hat{\gamma}_p\equiv\overline{\lim_{n\to\infty}}\{n^p\sup_{0<\lambda\leqslant a}\lambda^p|1-\lambda g_n(\lambda)|\}=p^p(g(0)e)^{-p},\quad 0\leqslant p<\infty. \tag{4.8}$$

Для непрерывной функции $g:[0,a]\to R$ условия леммы выполнены, если

$$0<g(\lambda)<2/\lambda\quad(0\leqslant\lambda\leqslant a). \tag{4.9}$$

Доказательство. В силу (4.4) $g(\lambda)>0$ при $\lambda>0$; кроме того,

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}|1-\lambda g(\lambda)|=1.$$

Из (4.3) заключаем, что $0<g_n(\lambda)\leqslant ng(\lambda)$ $(0\leqslant\lambda\leqslant a)$. Значит, выполнено условие (3.1) с постоянной γ, указанной в (4.5):

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}|g_n(\lambda)|\leqslant n\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}g(\lambda)=\gamma n.$$

Из (4.4) и равенства $1-\lambda g_n(\lambda)=(1-\lambda g(\lambda))^n$ вытекает справедливость (3.2) с $\gamma_0=1$ при $p=0$. Докажем, что (3.2) выполнено при $p>0$. В силу условия $g(0)>0$ и непрерывности $g(\lambda)$ в точке $\lambda=0$ существует такое $\varepsilon\in(0, a)$ и такая постоянная $\beta>0$, что

$$\beta\leqslant g(\lambda)\leqslant\gamma \qquad (0\leqslant\lambda\leqslant\varepsilon). \tag{4.10}$$

Будем считать, что $\varepsilon\leqslant 1/\gamma$. Тогда $0\leqslant 1-\lambda g(\lambda)\leqslant 1-\beta\lambda$ $(0\leqslant\lambda\leqslant\leqslant\varepsilon)$ и

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant\varepsilon}\lambda^p|1-\lambda g_n(\lambda)|=\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant\varepsilon}\lambda^p|1-\lambda g(\lambda)|^n\leqslant$$

$$\leqslant\max_{0\leqslant\lambda\leqslant\varepsilon}\lambda^p(1-\beta\lambda)^n\leqslant\left(\frac{p}{\beta(n+p)}\right)^p\left(1-\frac{p}{n+p}\right)^n=$$

$$=\left(\frac{p}{\beta}\right)^p\left(1-\frac{p}{n+p}\right)^{n+p}n^{-p}\leqslant\left(\frac{p}{\beta}\right)^p e^{-p}n^{-p};$$

здесь мы учли, что функция $\lambda^p(1-\beta\lambda)^n$ своего максимума на $[0, 1/\beta]$ достигает в точке $\lambda=p/(\beta(n+p))$ и воспользовались неравенством

$$(1-(t/n))^n\leqslant e^{-t} \qquad (n\geqslant t>0). \tag{4.11}$$

На отрезке $[\varepsilon, a]$ в силу (4.4) имеем

$$\sup_{\varepsilon\leqslant\lambda\leqslant a}\lambda^p|1-\lambda g_n(\lambda)|=\sup_{\varepsilon\leqslant\lambda\leqslant a}\lambda^p|1-\lambda g(\lambda)|^n\leqslant a^p\vartheta_\varepsilon^n=$$

$$=a^p(\vartheta_\varepsilon^n n^p)n^{-p}\leqslant c_p n^{-p}, \quad c_p=\mathrm{const};$$

мы учли, что $\vartheta_\varepsilon{}^n n^{-p}\to 0$ при $n\to\infty$. В итоге условие (3.2) выполнено с $\gamma_p=\max\{p^p\beta^{-p}e^{-p}, c_p\}$.

Если в (4.10) ε брать сколь угодно малым, то β будет сколь угодно близким к $g(0)$. Учитывая также, что в дополнение к (4.11) $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n\to e^{-t}$ при $n\to\infty$ и

$$n^p\sup_{\varepsilon\leqslant\lambda\leqslant a}\lambda^p|1-\lambda g_n(\lambda)|\leqslant a^p\vartheta_\varepsilon^n n^p\to 0,$$

получаем равенство (4.8). Равенства (4.6) и (4.7) доказываются более элементарно при помощи оценки супремума в отдельности на $[0, \varepsilon]$ и $[\varepsilon, a]$ с малым $\varepsilon>0$ с учетом близости $g(\lambda)$ к $g(0)$ на $[0, \varepsilon]$. Лемма 4.1 доказана.

Замечания. 1. Из (4.3) вытекает, что

$$\sup_{bn^{-1}\leqslant\lambda\leqslant a} g_n(\lambda)\leqslant b^{-1}n \qquad (b>0; n=1,2,\ldots). \tag{4.12}$$

Такая оценка полезна при больших b. Кроме того, для любого $\varepsilon>0$ найдутся такие достаточно большие $b>0$ и n_ε, что

$$\sup_{bn^{-1}\leqslant\lambda\leqslant a}\lambda^p|1-\lambda g_n(\lambda)\leqslant\varepsilon n^{-p} \quad \text{при } n\geqslant n_\varepsilon. \tag{4.13}$$

Действительно (ср. с (4.10)), $0\leqslant 1-\lambda g(\lambda)\leqslant 1-\beta\lambda$ $(0\leqslant\lambda\leqslant\alpha)$, где $\beta>0$ и $\alpha\in(0, a]$ — некоторые постоянные, $\alpha<\beta^{-1}$. Выберем

n_ε и b так, что $a^p n^p \vartheta_\alpha{}^n \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant n_\varepsilon$ и что $b \geqslant p/\beta$, $b^p e^{-b\beta} \leqslant \varepsilon$. Тогда при $n \geqslant n_\varepsilon$

$$\sup_{\alpha \leqslant \lambda \leqslant a} \lambda^p \,|\, 1 - \lambda g_n(\lambda) \,| \leqslant a^p \vartheta_\alpha^n \leqslant \varepsilon n^{-p},$$

а учитывая убывание функции $\lambda^p(1 - \beta\lambda)^n$ на отрезке $[bn^{-1}, \alpha]$, имеем

$$\sup_{bn^{-1} \leqslant \lambda \leqslant a} \lambda^p \,|\, 1 - \lambda g_n(\lambda) \,| \leqslant \sup_{bn^{-1} \leqslant \lambda \leqslant \alpha} \lambda^p (1 - \beta\lambda)^n \leqslant$$

$$\leqslant (b/n)^p (1 - b\beta/n)^n \leqslant b^p e^{-b\beta} n^{-p} \leqslant \varepsilon n^{-p}.$$

2. Лемма 4.1 верна лишь в случае конечного a. Однако с небольшой оговоркой она будет справедлива и в случае $g: [0, \infty) \to R$, если наложить некоторое условие на поведение $g(\lambda]$ на бесконечности. Достаточно, например, чтобы выполнялось соотношение $\lambda \,|\, 1 - \lambda g(\lambda) \,| \leqslant 1$ $(0 < \lambda_0 \leqslant \lambda < \infty)$. Условие (3.2) будет выполняться при $n \geqslant p$; форма остальных утверждений леммы 4.1 не изменится.

3. Если функция g определена и ограничена на $[-\alpha, a]$, то функции $g_n: [-\alpha, a] \to R$ удовлетворяют условию (3.10):

$$\sup_{-\alpha n^{-1} \leqslant \lambda \leqslant 0} |\, g_n(\lambda) \,| \leqslant \gamma^- n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4.14}$$

$$\gamma^- = (e^{\alpha c} - 1)\,\alpha^{-1}, \qquad c = \sup_{-\alpha \leqslant \lambda \leqslant 0} |\, g(\lambda) \,|.$$

Действительно, для $\lambda \in [-\alpha n^{-1}, 0]$ имеем

$$|\, g_n(\lambda) \,| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} |\, 1 - \lambda g(\lambda) \,|^j \,|\, g(\lambda) \,| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} (1 + c\alpha n^{-1})^j c =$$

$$= [(1 + c\alpha n^{-1})^n - 1]\,\alpha^{-1} n \leqslant \gamma^- n.$$

В случае непрерывной в точке $\lambda = 0$ функции $g: [-\alpha, a] \to R$ из тех же рассуждений следует, что

$$\hat{\gamma}^- \equiv \varlimsup_{n \to \infty} \{ n^{-1} \sup_{-\alpha n^{-1} \leqslant \lambda \leqslant 0} |\, g_n(\lambda) \,| \} \leqslant (e^{\alpha g(0)} - 1)\,\alpha^{-1}.$$

4.2. **Подкласс итерационных методов.** Выделим из класса итерационных методов (4.1) и (4.2) подкласс, для которого выполнены условия (3.7), (3.8). Нам эти условия понадобятся не только для определенных в (4.3) функций $g_n(\lambda)$, но и для функций, получаемых из (4.3) естественным распространением на ненатуральные $r \geqslant 1$ (см. (4.16)).

Лемма 4.2. Пусть функция $g: [0, a] \to R$ измерима по Борелю, неотрицательна и

$$0 \leqslant 1 - \lambda g(\lambda) \leqslant \frac{g(\lambda)}{\varkappa} (0 \leqslant \lambda \leqslant a), \quad \varkappa \equiv \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} g(\lambda) < \infty. \tag{4.15}$$

Тогда для функций $g_r: [0, a] \to R$, определяемых равенствами

$$g_r(\lambda) = \lambda^{-1}[1 - (1 - \lambda g(\lambda))^r] \quad (0 < \lambda \leqslant a), \quad g_r(0) = r g(0), \quad r \geqslant 1. \tag{4.16}$$

выполнены условия (3.7), (3.8) с той оговоркой, что рассматриваются только значения параметра $r \geqslant 1$:

$$g_r(\lambda) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant 1 - \lambda g_r(\lambda) \leqslant \frac{g_r(\lambda)}{\varkappa_r} \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant a), \quad r \geqslant 1, \tag{4.17}$$

$$\varkappa_r \equiv \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} g_r(\lambda) = \varkappa r, \quad r \geqslant 1. \tag{4.18}$$

Кроме того, для $r > p$ (3.2) конкретизируется так:

$$\sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} \lambda^p |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant p^p (e\varkappa)^{-p} (r-p)^{-p} \quad (0 \leqslant p < \infty). \tag{4.19}$$

Утверждения сохраняют силу и при $a = \infty$.

Доказательство. Из (4.15) следует, что

$$g(\lambda) \geqslant \frac{\varkappa}{1+\varkappa\lambda}, \quad 0 \leqslant 1 - \lambda g(\lambda) \leqslant \frac{1}{1+\varkappa\lambda} \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant a), \tag{4.20}$$

$$g(0) = \varkappa = \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} g(\lambda).$$

Отсюда видно, что функция g непрерывна в точке $\lambda = 0$ и удовлетворяет условию (4.4). Таким образом, выполнены условия леммы 4.1.

Докажем (4.18) для определенных формулами (4.16) функций g_r. Поскольку $(1-\mu)^r \geqslant 1 - \mu r$ при $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, $r \geqslant 1$, то

$$g_r(\lambda) \leqslant \lambda^{-1}[1-(1-r\lambda g(\lambda))] = rg(\lambda) \qquad (0 < \lambda \leqslant a), \qquad r \geqslant 1,$$

и мы приходим к (4.18). При этом $g_r(0) = rg(0) = r\varkappa = \varkappa_r$.

Для доказательства (4.17) надо установить оценку (см. (4.18))

$$(1-\lambda g(\lambda))^r \leqslant (\varkappa r\lambda)^{-1}[1-(1-\lambda g(\lambda)^r] \qquad (0 < \lambda \leqslant a), \quad r \geqslant 1.$$

Вместо этого достаточно убедиться в справедливости более сильного (см. (4.20)) неравенства

$$(1+\varkappa\lambda)^{-r} \leqslant (\varkappa r\lambda)^{-1}[1-(1+\varkappa\lambda)^{-r}] \qquad (0 < \lambda \leqslant a), \quad r \geqslant 1,$$

или

$$1 + r\varkappa\lambda \leqslant (1+\varkappa\lambda)^r \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant a), \qquad r \geqslant 1.$$

Последнее неравенство проверяется элементарно: для функции $\psi_r(\lambda) = 1 + r\varkappa\lambda - (1+\varkappa\lambda)^r$ с $r \geqslant 1$ имеем $\psi_r(0) = 0$ и $\psi_r'(\lambda) \leqslant 0$ $(0 \leqslant \lambda < \infty)$. Итак, (4.17) установлено. Из него следует, в частности, что функции $g_r(\lambda)$ непрерывны в точке $\lambda = 0$.

Докажем (4.19). В силу (4.20) имеем

$$\sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} \lambda^p |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant \sup_{0 \leqslant \lambda < \infty} \frac{\lambda^p}{(1+\varkappa\lambda)^r} = \left(\frac{p}{r-p}\right)^p \varkappa^{-p} \left(1 - \frac{p}{r-p}\right)^{-r}$$

(максимум достигается в точке $\lambda = p/((r-p)\varkappa)$). Учитывая (см. (4.11)), что $(1+p/(r-p))^{-r} = (1-p/r)^r \leqslant e^{-p}$ $(r > p)$, получаем (4.19). Лемма 4.2 доказана.

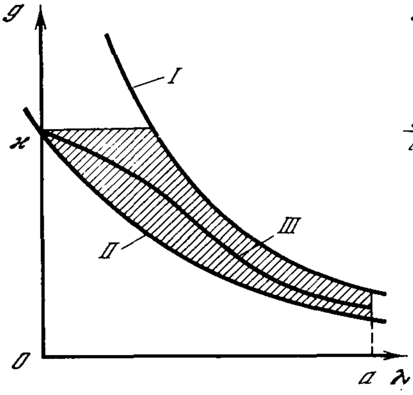

Рис. 1. Условие (4.15) выполняется, если график функции $g(\lambda)$ расположен в заштрихованной области

$I - 1/\lambda$, $II - \varkappa/(1+\varkappa\lambda)$, $III - g(\lambda)$

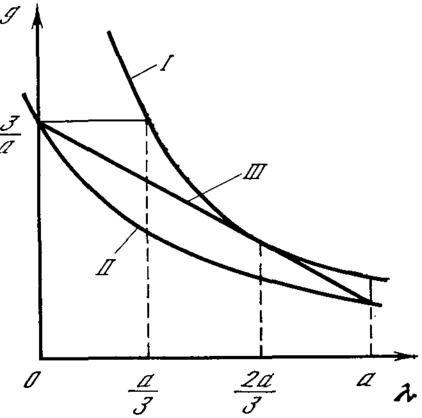

Рис. 2. Линейная функция $g(\lambda)$ удовлетворяет условию (4.15)

$I - 1/\lambda$, $II - 3/(a+3\lambda)$, $III - g(\lambda)=3/a-9\lambda/(4a^2)$ $(0\leqslant\lambda\leqslant a)$

Геометрическая интерпретация условия (4.15) дана на рис. 4.1.

4.3. **Обсуждение примеров.** Наиболее простые итерационные схемы соответствуют функции $g(\lambda)\equiv\mu=\mathrm{const}$. А именно методы (4.1) и (4.2) в таком случае приобретают форму явных итерационных схем (2.1) и (2.3). Условия леммы 4.1 выполнены, если $\mu\in(0, 2/a)$; условия леммы 4.2 выполнены, если $\mu\in(0, 1/a]$. При $g(\lambda)=(\alpha+\lambda)^{-1}$, $\alpha=\mathrm{const}>0$, методы (4.1) и (4.2) приобретают форму неявных итерационных схем (2.2) и (2.4). Условия лемм 4.1 и 4.2 выполнены.

Из класса итерационных методов с линейными функциями g можно рекомендовать метод с $g(\lambda)=3/a-(9/4a^2)\lambda$ $(0\leqslant\lambda\leqslant a)$. Последняя функция удовлетворяет также условиям леммы 4.2 и является в некотором смысле экстремальной среди линейных функций, удовлетворяющих условиям указанной леммы (см. рис. 4.2).

4.4. **Операторная форма итерационных методов.** В случае большого количества итерационных шагов более выгодной может оказаться операторная форма итераций (4.1), позволяющая строить u_n для номеров вида $n=m^k$ $(k=1, 2, \ldots;$ $m\geqslant2$ — задаваемое натуральное число). По начальному оператору

$$C_0=g(A) \qquad (4.21)$$

итеративно строим операторы

$$C_k=C_{k-1}\sum_{j=0}^{m-1}(I-AC_{k-1})^j, \quad k=1,2,\ldots. \qquad (4.22)$$

Легко убедиться, что приближения

$$u_n = (I - AC_k)u_0 + C_k f \quad (n = m^k,\ k = 1, 2, \ldots) \tag{4.23}$$

совпадают с приближениями (4.1).

Операторная форма итерационного метода (4.2) имеет следующий вид:

$$C_0 = g(B), \qquad B = A^*A, \tag{4.24}$$

$$C_k = C_{k-1} \sum_{j=0}^{m-1} (I - BC_{k-1})^j, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.25}$$

$$u_n = (I - BC_k)u_0 + C_k A^* f \quad (n = m^k,\ k = 1, 2, \ldots). \tag{4.26}$$

Различные итерационные методы, соответствующие различным функциям $g(\lambda)$, в операторной форме отличаются друг от друга только начальным приближением C_0. Например, $C_0 = \mu I$ $(0 < \mu < 2/a)$ в случае операторной формы явных итерационных схем (2.1) и (2.3), $C_0 = (\alpha I + A)^{-1}$ в случае схемы (2.2), $C_0 = (\alpha I + B)^{-1}$ в случае схемы (2.4). Чаще всего схемы (4.21) – (4.23) и (4.24) – (4.26) привлекаются с $m = 2$ (схемы Шульца – Хотеллинга).

5. Сходимость приближенных методов в случае точных данных

5.1. **Случай самосопряженной задачи.** Теорема 5.1. Пусть $H = F$, $A = A^* \geqslant 0$, $\|A\| \leqslant a$ и выполнено условие (3.2). Тогда для приближения (3.3) справедливы следующие утверждения. 1. При каждом $f \in H$ имеет место сходимость

$$Au_r \to Pf \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{5.1}$$

где P — ортопроектор на $\overline{\mathscr{R}(A)}$. 2. Если $f \in \mathscr{R}(A)$, то

$$u_r \to u_* \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{5.2}$$

где u_* — ближайшее к u_0 решение уравнения (1.1). Если при этом начальная погрешность имеет вид

$$u_0 - u_* = A^p v, \quad p \geqslant 0, \tag{5.3}$$

то справедливы оценки погрешности

$$\|A^q(u_r - u_*)\| \leqslant \gamma_{p+q} \|v\| r^{-(p+q)} \quad (p \geqslant 0, q \geqslant 0, p + q \leqslant p_0), \tag{5.4}$$

$$\|A^q(u_r - u_*)\| = o(r^{-(p+q)}) \quad (p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ p + q < p_0). \tag{5.5}$$

3. Если $f \overline{\in} \mathscr{R}(A)$ и $|g_r(0)| \to \infty$ при $r \to \infty$, *то*

$$\|u_r\| \to \infty \quad \textit{при} \quad r \to \infty. \tag{5.6}$$

Отметим, что из этих утверждений лишь оценки (5.4) и (5.5) используют условие (3.2) в полной мере; остальные утверждения будут доказаны при ослабленных предположениях

$$\sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_0 = \text{const} \quad (r > 0), \tag{5.7}$$

$$1 - \lambda g_r(\lambda) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty \quad \forall \lambda \in (0, a]. \tag{5.8}$$

Доказательству теоремы предпошлем вспомогательные результаты.

Лемма 5.1. Пусть $A=A^*\geqslant 0$, $\|A\|\leqslant a$ и выполнены условия (5.7) и (5.8). Тогда для каждого $w\in H$

$$(I-Ag_r(A))w\to P_0w \quad \text{при} \quad r\to\infty, \tag{5.9}$$

где $P_0=I-P$ — ортопроектор на $\mathcal{N}(A)=\{u\in H\colon Au=0\}$.

Доказательство. Поскольку $(I-Ag_r(A))P_0w=P_0w$, $P_0+P=I$, то достаточно показать, что $(I-Ag_r(A))Pw\to 0$ при $r\to\infty$. Пусть $P(\lambda)$ — спектральное семейство проекторов оператора A. Обозначив для краткости $v=Pw$, имеем

$$\|(I-Ag_r(A))Pw\|^2=\int\limits_0^a|1-\lambda g_r(\lambda)|^2d\langle P(\lambda)v, v\rangle.$$

Поскольку $v\perp\mathcal{N}(A)$, то $\lambda=0$ является точкой непрерывности функции $\langle P(\lambda)v, v\rangle$ и соответствующая мера одноточечного множества $\{0\}$ равна нулю. В силу (5.7) и (5.8) подынтегральная функция равномерно по λ ограничена и почти всюду сходится к нулю при $r\to\infty$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получаем $\|(I-Ag_r(A))Pw\|\to 0$ при $r\to\infty$. Лемма 5.1 доказана.

Лемма 5.2. Пусть $A=A^*\geqslant 0$, $\|A\|\leqslant a$ и выполнено условие (3.2). Тогда для каждого $v\in\mathcal{N}(A)^\perp=\overline{\mathcal{R}(A)}$ имеет место соотношение

$$r^p\|A^p(I-Ag_r(A))v\|\to 0 \text{ при } r\to\infty \quad (0\leqslant p<p_0). \tag{5.10}$$

Доказательство. По условию (3.2)

$$r^p\|A^p(I-Ag_r(A))\|\leqslant r^p\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}\lambda^p|1-\lambda g_r(\lambda)|\leqslant\gamma_p \quad (r>0).$$

Поэтому соотношение (5.10) достаточно установить для какого-нибудь плотного в $\overline{\mathcal{R}(A)}$ подмножества. В этом легко убедиться непосредственно, но проще всего сослаться на теорему Банаха—Штейнгауза, которая утверждает следующее. Пусть E и E_1 — банаховы пространства, B, $B_n\in\mathcal{L}(E, E_1)$. Сходимость $B_nu\to Bu$ при $n\to\infty$ для всех $u\in E$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в E подмножестве и нормы $\|B_n\|$, $n=1, 2, \ldots$, ограничены не зависящей от n постоянной.

В качестве такого плотного множества возьмем $\mathcal{R}(A^{p_0-p})$. Это множество плотно в своем замыкании $\overline{\mathcal{R}(A^{p_0-p})}=\overline{\mathcal{R}(A)}$ (здесь существенно, что $p<p_0$), и для любого элемента $v=A^{p_0-p}w\in\mathcal{R}(A^{p_0-p})$

$$r^p\|A^p(I-Ag_r(A))v\|=r^p\|A^{p_0}(I-Ag_r(A))w\|\leqslant$$
$$\leqslant\gamma_{p_0}r^{-(p_0-p)}\|w\|\to 0 \quad \text{при } r\to\infty.$$

Лемма 5.2 доказана.

Доказательство теоремы 5.1. Из (3.3) следует, что

$$Au_r - f = (I - Ag_r(A))(Au_0 - f). \tag{5.11}$$

Поскольку $P_0A=0$, то на основании (5.9) получаем $Au_r - f \to -P_0 f$, т. е. $Au_r \to f - P_0 f = Pf$ при $r \to \infty$. Тем самым утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2. Пусть $f \in \mathscr{R}(A)$, u_* — ближайшее к u_0 решение уравнения (1.1). Из (3.3) следует

$$u_r - u_* = (I - Ag_r(A))(u_0 - u_*). \tag{5.12}$$

Поскольку $u_0 - u_* \perp \mathscr{N}(A)$, то при помощи (5.9) немедленно получаем сходимость (5.2). В случае начальной погрешности (5.3) из (5.12) получаем

$$A^q(u_r - u_*) = A^{p+q}(I - Ag_r(A))v, \tag{5.13}$$

$$\|A^q(u_r - u_*)\| \leqslant \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} \lambda^{p+q} |1 - \lambda g_r(\lambda)| \|v\|.$$

Отсюда на основании (3.2) немедленно получаем оценку (5.4), а при помощи (5.10) также оценку (5.5); заметим, что элемент v в представлении (5.3) всегда можно выбрать ортогональным к $\mathscr{N}(A)$.

Докажем утверждение 3. Допустим, что для некоторых $r_n \to \infty$ имеем $\|u_{r_n}\| \leqslant \mathrm{const}$; покажем тогда, что $f \in \mathscr{R}(A)$. С учетом определения u_r (см. (3.3)) и (5.7) имеем также $\|g_{r_n}(A)f\| \leqslant \leqslant \mathrm{const}$. В гильбертовом пространстве всякая ограниченная последовательность содержит слабо сходящуюся подпоследовательность; не ограничивая общности, будем считать, что сама последовательность $g_{r_n}(A)f$ слабо сходится: $g_{r_n}(A)f \rightharpoonup u'$, $n \to \infty$. В силу леммы 5.1 $Ag_{r_n}(A)f \to Pf$, $n \to \infty$. Из последних двух соотношений следует, что $Au' = Pf$, $Pf \in \mathscr{R}(A)$. Теперь для получения включения $f \in \mathscr{R}(A)$ остается заметить, что $P_0 f = 0$. Последнее вытекает из условия $|g_r(0)| \to \infty$ при $r \to \infty$, равенства $g_r(0)P_0 f = P_0 g_r(A) f$ и ограниченности последовательности $g_{r_n}(A)f$. Теорема 5.1 доказана.

Дополнения к теореме 5.1. 1. Теорема 5.1 и ее доказательство распространяются на случай знакопеременного оператора $A = A^*$. Вместо (3.2) используется условие (3.13) или его ослабления, аналогичные (5.7), (5.8); условие (5.3) примем в виде $u_0 - u_* = |A|^p v$.

2. В случае $a = \infty$ и неограниченного оператора $A = A^* \geqslant 0$ утверждения 2 и 3 теоремы 5.1 и их доказательства проходят без изменений. Утверждение 1 и его доказательство проходят при условии $u_0 \in \mathscr{D}(A)$, из которого, в частности, следует, что $u_r \in \mathscr{D}(A)$ при $r > 0$. В случае произвольного $u_0 \in H$ утверждение 1 сохраняет силу, если в условии (3.2) потребовать, чтобы $p_0 \geqslant 1$; отсюда опять следует, что $u_r \in \mathscr{D}(A)$ при $r > 0$. Для доказательства (5.1) полезно заметить, что если начальным u_0^1 и u_0^2 соответствуют u_r^1 и u_r^2, то $\|Au_r^1 - Au_r^2\| \leqslant \gamma_1 r^{-1} \|u_0^1 - u_0^2\|$. По-

этому из справедливости (5.1) для $u_0 \in \mathscr{D}(A)$ вытекает справедливость для всех $u_0 \in H$.

Укажем некоторые следствия из оценок (5.3), (5.4):

$$\|u_r - u_*\| \leqslant \gamma_p \|v\| r^{-p} \quad (0 \leqslant p \leqslant p_0), \tag{5.14}$$

$$\|A^{1/2}(u_r - u_*)\| \leqslant \gamma_{p+\frac{1}{2}} \|v\| \, r^{-\left(p+\frac{1}{2}\right)} \quad \left(0 \leqslant p \leqslant p_0 - \frac{1}{2}\right), \tag{5.15}$$

$$\|Au_r - f\| \leqslant \gamma_{p+1} \|v\| r^{-(p+1)} \quad (0 \leqslant p \leqslant p_0 - 1) \tag{5.16}$$

(в (5.15) и (5.16) предполагаем $p_0 \geqslant 1/2$ и соответственно $p_0 \geqslant 1$).

Решения уравнения (1.1) минимизируют функционал

$$\Psi(u) = \langle Au, u\rangle - \langle f, u\rangle - \langle u, f\rangle, \quad u \in H, \tag{5.17}$$

который можно записать в виде $\Psi(u) = \Psi(u_*) + \|A^{1/2}(u - u_*)\|^2$. Из оценки (5.15) следует, что

$$\Psi(u_r) - \Psi(u_*) \leqslant \gamma^2_{p+1/2} \|v\|^2 r^{-(2p+1)} \quad (0 \leqslant p \leqslant p_0 - 1/2). \tag{5.18}$$

В частности, при $p=0$, т. е. в случае произвольного $f \in \mathscr{R}(A)$, имеем $\Psi(u_r) - \Psi(u_*) \leqslant \gamma_{1/2}^2 \|u_0 - u_*\|^2 r^{-1}$.

5.2. **Случай несамосопряженной задачи.** Рассмотрим теперь случай уравнения (1.1) с произвольным оператором $A \in \mathscr{L}(H, F)$. Обозначим через $P \in \mathscr{L}(H, H)$ и $Q \in \mathscr{L}(F, F)$ ортопроекторы соответственно на $\overline{\mathscr{R}(A^*)} \subseteq H$ и $\overline{\mathscr{R}(A)} \subseteq F$, а через $P_0 \in \mathscr{L}(H, H)$ и $Q_0 \in \mathscr{L}(F, F)$ — ортопроекторы соответственно на $\mathscr{N}(A)$ и $\mathscr{N}(A^*)$. Тогда $P_0 + P = I$, $Q_0 + Q = I$. Непосредственными следствиями из лемм 5.1 и 5.2 являются

Лемма 5.3. Пусть $\|A\|^2 \leqslant a$ и выполнены условия (5.7) и (5.8). Тогда при $r \to \infty$

$$(I - A^*Ag_r(A^*A))w \to P_0 w \quad \forall w \in H, \tag{5.19}$$

$$(I - AA^*g_r(AA^*))z \to Q_0 z \quad \forall z \in F. \tag{5.20}$$

Лемма 5.4. Пусть $\|A\|^2 \leqslant a$ и выполнено условие (3.2). Тогда при $r \to \infty$

$$r^{p/2} \| |A|^p (I - A^*Ag_r(A^*A)) w \| \to 0 \quad (0 \leqslant p < 2p_0) \quad \forall w \in \mathscr{N}(A)^\perp, \tag{5.21}$$

$$r^{p/2} \| |A^*|^p (I - AA^*g_r(AA^*)) z \| \to 0 \quad (0 \leqslant p < 2p_0) \quad \forall z \in \mathscr{N}(A^*)^\perp, \tag{5.22}$$

где $|A| = (A^*A)^{1/2}$, $|A^*| = (AA^*)^{1/2}$.

Теорема 5.2. Пусть $\|A\|^2 \leqslant a$ и выполнено условие (3.2). Тогда для приближения (3.4) справедливы следующие утверждения.

1. При каждом $f \in F$ имеют место соотношения

$$Au_r \to Qf, \quad A^*Au_r \to A^*f \text{ при } r \to \infty. \tag{5.23}$$

2. Если $Qf \in \mathscr{R}(A)$, то

$$u_r \to u_* \text{ при } r \to \infty, \tag{5.24}$$

где u_* — ближайшее к u_0 квазирешение уравнения (1.1). Если при этом начальная погрешность представима в виде

$$u_0 - u_* = |A|^p v, \ p \geqslant 0 \ \ (|A| = (A^*A)^{1/2}), \tag{5.25}$$

то справедливы оценки погрешности

$$\||A|^q (u_r - u_*)\| \leqslant \gamma_{(p+q)/2} \|v\| r^{-(p+q)/2} \qquad (p \geqslant 0, q \geqslant 0, p + q \leqslant 2p_0) \tag{5.26}$$

$$\||A\|^q (u_r - u_*)\| = o(r^{-(p+q)/2} \quad (p \geqslant 0, q \geqslant 0, p + q < 2p_0). \tag{5.27}$$

3. Если $Qf \overline{\in} \mathscr{R}(A)$, то $\|u_r\| \to \infty$ при $r \to \infty$.

Утверждения, касающиеся сходимости, сохраняют силу при ослаблении (3.2) до условий (5.7), (5.8); лишь оценки (5.25)—(5.27) используют условие (3.2) в полном объеме.

Доказательство. 1. Из (3.4) при помощи (3.29) получаем

$$Au_r - f = (I - AA^* g_r(AA^*))(Au_0 - f), \tag{5.28}$$

$$A^*(Au_r - f) = (I - A^*Ag_r(A^*A))A^*(Au_0 - f). \tag{5.29}$$

Поскольку $Q_0 A = 0$, $P_0 A^* = 0$, то в силу леммы 5.3 получаем (5.23).

2. Если $Qf \in \mathscr{R}(A)$, то из (3.4) следует, что

$$u_r - u_* = (I - A^*Ag_r(A^*A))(u_0 - u_*), \tag{5.30}$$

а отсюда на основании (5.19) получаем сходимость (5.24). Если начальная погрешность $u_0 - u_*$ представима в виде (5.25), то в соответствии с (5.30) имеем

$$|A|^q (u_r - u_*) = |A|^{p+q} (I - A^*Ag_r(A^*A))v. \tag{5.31}$$

Отсюда на основании (3.2) и (5.21) получаем оценки (5.26) и (5.27).

3. Пусть $\|u_{r_n}\| \leqslant \text{const}$ при некоторых $r_n \to \infty$. Покажем, что тогда $Qf \in \mathscr{R}(A)$. С учетом (3.4) и (5.7) имеем также $\|g_{r_n}(A^*A)A^*f\| \leqslant \text{const}$, и можно считать, что $u_n' \equiv g_{r_n}(A^*A)A^*f \longrightarrow u' \in H$, $n \to \infty$. В силу (3.29) $Au_n' = AA^*g_r{}^u (AA^*)f$, и из (5.20) следует $Au_n' \to f - Q_0 f = Qf$, $n \to \infty$. Значит, $Au' = Qf$, $Qf \in \mathscr{R}(A)$. Теорема 5.2 доказана.

Обсудим случай неограниченного замкнутого плотно определенного оператора $A : \mathscr{D}(A) \subset H \to F$. Допустим, что (3.2) справедливо с $a = \infty$. Тогда утверждения 2 и 3 теоремы 5.2 и их доказательства проходят без изменений; утверждение 1 и его доказательство проходят без изменений, если $u_0 \in \mathscr{D}(A)$, $Au_0 - f \in \mathscr{D}(A^*)$. В случае произвольного $u_0 \in H$ утверждение 1 остается в силе, если в условии (3.2) потребовать, чтобы $p_0 \geqslant 1$. Тогда, в частности, $u_r \in \mathscr{D}(A)$, $Au_r - f \in \mathscr{D}(A^*)$ при $r > 0$.

Теорема 5.2 может расцениваться как теорема об аппроксимации псевдообратного оператора A^+. В частности, утверждения 2 и 3 можно трактовать так: $g_r(A^*A)A^*f \to A^+f$ при $r \to \infty$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathscr{D}(A^+) \equiv \mathscr{R}(A) \oplus \mathscr{N}(A^*)$.

Укажем следствия из оценки (5.25), (5.26):

$$\|u_r - u_*\| \leqslant \gamma_{p/2} \|v\| r^{-p/2} \quad (0 \leqslant p \leqslant 2p_0), \tag{5.32}$$

$$\|Au_r - Qf\| \leqslant \gamma_{(p+1)/2} \|v\| r^{-(p+1)/2} \quad (0 \leqslant p \leqslant 2p_0 - 1), \tag{5.33}$$

$$\|A^*(Au_r - f)\| \leqslant \gamma_{(p+2)/2} \|v\| r^{-(p+2)/2} \quad (0 \leqslant p \leqslant 2p_0 - 2) \tag{5.34}$$

(в (5.33) предполагается $p_0 \geqslant 1/2$, а в (5.34) – $p_0 \geqslant 1$).

Квазирешения уравнения (1.1) минимизируют функционал

$$\Phi(u) = \|Au - f\|^2, \tag{5.35}$$

который можно записать в виде $\Phi(u) = \Phi(u_*) + \|Au - Qf\|^2$. Из оценки (5.33) следует

$$\Phi(u_r) - \Phi(u_*) \leqslant \gamma^2_{(p+1)/2} \|v\|^2 r^{-(p+1)} \quad (0 \leqslant p \leqslant 2p_0 - 1). \tag{5.36}$$

В частности, при $p = 0$, т. е. в случае произвольного $f \in F$ с $Qf \in \mathscr{R}(A)$, имеем $\Phi(u_r) - \Phi(u_*) \leqslant \gamma_{1/2}^2 \|u_0 - u_*|^2 r^{-1}$.

3 глава

ЗАДАЧА С ПРИБЛИЖЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В этой главе изучается сходимость и быстрота сходимости приближенных методов решения линейного уравнения $Au=f$, правая часть которого известна приближенно: вместо точного $f\in\in\mathscr{R}(A)$ в нашем распоряжении некоторое его приближение f_δ, $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$. В таком случае в приближениях u_r, введенных в гл. II, нельзя устремлять r к бесконечности (при $r\to\infty$ эти приближения, как правило, расходятся). Вместо этого следует указать такое согласование $r=r(\delta)$ параметра r с уровнем точности правой части, чтобы при $\delta\to0$ соответствующие приближения $u_{r(\delta)}$ стремились к точному решению уравнения. Это согласование желательно провести так, чтобы получить оптимальные по порядку, а при возможности оптимальные по точности методы. Будут рассмотрены два основных способа выбора (согласования с δ) параметра регуляризации — априорный и апостериорный. Априорный выбор r возможен, если известен класс решений (например, класс истокопредставимых решений), которому решение при данном $f\in\mathscr{R}(A)$ принадлежит. Поскольку такая информация обычно недоступна или неточна, то априорный выбор параметра r имеет в основном теоретическое значение: он позволяет выявлять принципиальные возможности метода. Более практичен апостериорный выбор r по невязке: выбирается то значение r, при котором невязка $\|Au_r-f_\delta\|$ сравнима с δ. Этот способ особенно удобен в итерационных методах — счет ведется до того n, при котором невязка $\|Au_n-f_\delta\|$ будет достаточно малой. Подобное согласование r (или n) с δ принято называть принципом невязки. Оказывается, что при выборе r по принципу невязки мы получаем оптимальные по порядку методы на классах истокопредставимых решений и некоторых других классах. Подчеркнем, что при этом сам выбор r не использует информацию об истокопредставимости и вообще какую-либо другую информацию, кроме оценки $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$.

1. Априорный выбор параметра регуляризации (теоремы сходимости и элементарные оценки)

1.1. **Задача и методы решения,** обсуждаемые в этой главе, в основном те же, что и в гл. II. Итак, решению подлежит задача

$$Au=f, \tag{1.1}$$

где $A \in \mathscr{L}(H, F)$, причем H и F — гильбертовы пространства. Уравнение (1.1), вообще говоря, некорректно, так как никаких ограничений о замкнутости $\mathscr{R}(A)$ или тривиальности $\mathscr{N}(A)$ не накладывается. В отличие от гл. II теперь не будем считать f известным точно. Пусть вместо f в нашем распоряжении имеется некоторое его приближение $f_\delta \in F$, причем известна оценка $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$, где δ — малое положительное число. В приближенных методах, построенных в гл. II, вместо f будем использовать f_δ: в самосопряженном случае ($H = F$, $A = A^* \geqslant 0$, $\|A\| \leqslant a$) приближенное решение уравнения (1.1) имеет вид

$$u_r = (I - Ag_r(A))u_0 + g_r(A)f_\delta; \tag{1.2}$$

в несамосопряженном случае с произвольным $A \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A\|^2 \leqslant a$, приближенное решение имеет вид

$$u_r = (I - A^*Ag_r(A^*A))u_0 + g_r(A^*A)A^*f_\delta. \tag{1.3}$$

Напомним основные условия на порождающую систему функций:

$$\sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} |g_r(\lambda)| \leqslant \gamma r \quad (r > 0), \tag{1.4}$$

$$\sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} \lambda^p |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_p r^{-p} \quad (r > 0; 0 \leqslant p \leqslant p_0), \quad p_0 > 0. \tag{1.5}$$

В утверждениях о сходимости допускается ослабление (1.5) до условий

$$\sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_0 \quad (r > 0), \tag{1.6}$$

$$1 - \lambda g_r(\lambda) \to 0 \text{ при } r \to \infty \quad \forall \lambda \in (0, a]. \tag{1.7}$$

1.2. **Случай самосопряженной задачи.** Теорема 1.1. Пусть $H = F$, $A = A^* \geqslant 0$, $\|A\| \leqslant a$, $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ и выполнены условия (1.4), (1.6), (1.7). Выберем в приближении (1.2) параметр $r = r(\delta)$ так, что

$$r(\delta) \to \infty, \quad \delta r(\delta) \to 0 \text{ при } \delta \to 0. \tag{1.8}$$

Тогда $u_{r(\delta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$, где u_* — ближайшее к u_0 решение уравнения (1.1).

Если начальная погрешность представима в виде

$$u_0 - u_* = A^p v, \quad p > 0, \quad \|v\| \leqslant \rho \tag{1.9}$$

и выполнены условия (1.4) и (1.5), то при выборе

$$r = d_p \rho^{1/(p+1)} \delta^{-1/(p+1)}, \quad d_p = (p\gamma_p/\gamma)^{1/(p+1)} \tag{1.10}$$

справедлива оценка

$$\|u_r - u_*\| \leqslant c_p \rho^{1/(p+1)} \delta^{p/(p+1)}, \quad 0 < p \leqslant p_0, \tag{1.11}$$

$$c_p = (p^{1/(p+1)} + p^{-p/(p+1)}) \gamma^{p/(p+1)} \gamma_p^{1/(p+1)}. \tag{1.12}$$

Доказательство. Погрешность приближения (1.2) выражается формулой

$$u_r - u_* = (I - Ag_r(A))(u_0 - u_*) + g_r(A)(f_\delta - f). \tag{1.13}$$

Поскольку u_* — ближайшее к u_0 решение уравнения (1.1), то начальная погрешность u_0-u_* ортогональна $\mathcal{N}(A)$ и по лемме 5.1 гл. II

$$\|(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)\|\to 0 \text{ при } r\to\infty. \tag{1.14}$$

Второй член в силу условия (1.4) оценивается так:

$$\|g_r(A)(f_\delta-f)\|\leqslant\gamma r\delta; \tag{1.15}$$

эту оценку, вообще говоря, нельзя улучшить. Этот член тем меньше, чем меньше r, и при $r\to\infty$ он стремится к ∞. Итак, для первого члена в выражении погрешности (1.13) желательны большие r, для второго — малые. Компромисс достигается за счет условия (1.8), в силу которого оба члена стремятся к нулю при $\delta\to 0$.

В случае начальной погрешности (1.9) на основании (1.5) имеем

$$\|(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)\|=\|(I-Ag_r(A))A^pv\|\leqslant\gamma_p r^{-p}\|v\|,$$

что совместно с (1.13) и (1.15) дает $\|u_r-u_*\|\leqslant\gamma_p r^{-p}\rho+\gamma r\delta$. Минимизируя правую часть по r, получаем для r выражение (1.10), а для погрешности $\|u_r-u_*\|$ — оценку (1.11), (1.12). Теорема 1.1 доказана.

Замечания. 1. Теорема 1.1 сохраняет силу и в случае неограниченного оператора $A=A^*\geqslant 0$, если в условиях (1.4)—(1.7) $a=\infty$.

2. Вполне аналогичный теореме 1.1 результат справедлив и в случае знакопеременного оператора $A=A^*$ с $\sigma(A)\subseteq[-a_0, a]$, если аналоги условий (1.4)—(1.7) выполняются на $[-a_0, a]$.

3. Допустим, что $\sigma(A)=[0, a]$ и (1.4) справедливо со знаком равенства. В случае выбора $r(\delta)=d\delta^{-1}$ существуют такие $f_\delta\in F$, $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$, что $\|u_{r(\delta)}-u_*\|\geqslant\gamma d$ при всех $\delta>0$, т. е. сходимости $u_{r(\delta)}$ к u_* нет. Но все же имеет место слабая сходимость $u_{r(\delta)}\xrightarrow{\ \ }u_*$ при $\delta\to 0$, если $\mathcal{N}(A)=0$.

Действительно, в силу (1.13) и (1.14) дело сводится к доказательству сходимости $g_{r(\delta)}(A)(f_\delta-f)\xrightarrow{\ \ }0$. Поскольку

$$\|g_{r(\delta)}(A)(f_\delta-f)\|\leqslant\gamma r(\delta)\delta=\gamma d=\text{const}\quad(\delta>0),$$

то достаточно убедиться, что $\langle g_{r(\delta)}(A)(f_\delta-f), u\rangle\to 0$ при $\delta\to 0$ для каждого u из некоторого плотного в H подмножества. В случае $\mathcal{N}(A)=0$ таковым является $\mathcal{R}(A)$: для $u=Av$ имеем

$$|\langle g_{r(\delta)}(A)(f_\delta-f), u\rangle|=|\langle Ag_{r(\delta)}(A)(f_\delta-f), v\rangle|\leqslant(1+\gamma_0)\|v\|\delta.$$

4. Если $\sigma(A)=[0, a]$, а условия (1.4) и (1.5) имеют место со знаком равенства, то для любого $\varepsilon>0$ существуют такие v ($\|v\|\leqslant\rho$) и f_δ ($\|f_0-f\|\leqslant\delta$), что в случае начальной погрешности (1.9) при всех $r>0$ выполняется неравенство

$$\|u_r-u_*\|\geqslant\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2}}c_p\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}\qquad 0<p\leqslant p_0, \tag{1.16}$$

где c_p — определенная в (1.12) постоянная.

Действительно, возьмем такие v ($\|v\|=\rho$) и z_δ ($\|z_\delta\|=\delta$), что

$$\|(I-Ag_r(A))A^p v\| \geqslant (1-\varepsilon)\|(I-Ag_r(A))A^p\|\|v\|,$$

$$\|g_r(A)z_\delta\| \geqslant (1-\varepsilon)\|g_r(A)\|\|z_\delta\|,$$

$$\mathrm{Re}\langle (I-Ag_r(A))A^p v, g_r(A)z_\delta\rangle \geqslant 0$$

(последнее неравенство достигается умножением z_δ на подходящее число ζ, $|\zeta|=1$, что не портит предыдущих двух неравенств). Полагая $f_\delta=f+z_\delta$ и замечая, что при сделанных предположениях $\|(I-Ag_r(A))A^p\|=\gamma_p r^{-p}$, $\|g_r(A)\|=\gamma r$, получаем из (1.13)

$$\|u_r-u_*\|^2=\|(I-Ag_r(A))A^p v\|^2+2\mathrm{Re}\langle (I-Ag_r(A))A^p v, g_r(A)z_\delta\rangle+$$
$$+\|g_r(A)z_\delta\|^2 \geqslant (1-\varepsilon)^2(\gamma_p^2 r^{-2p}\rho^2+\gamma^2 r^2\delta^2),$$

откуда

$$\|u_r-u_*\| \geqslant \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2}}(\gamma_p r^{-p}\rho+\gamma r\delta) \geqslant \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2}} c_p \rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}.$$

1.3. **Случай несамосопряженной задачи.** Напомним, что из условий (1.4) и (1.6) вытекает неравенство

$$\gamma_* \equiv \sup_{r>0} (r^{-1/2} \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^{1/2}|g_r(\lambda)|) < \infty.$$

Пусть Q — ортопроектор в F, проектирующий на $\overline{\mathcal{R}(A)}$.

Теорема 1.2. Пусть $A\in\mathcal{L}(H, F)$, $\|A\|^2\leqslant a$, $Qf\in\mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$ и выполнены условия (1.4) и (1.6), (1.7). Выберем в приближении (1.3) параметр $r=r(\delta)$ так, что

$$r(\delta)\to\infty,\ \delta^2 r(\delta)\to 0 \text{ при } \delta\to 0. \tag{1.17}$$

Тогда $u_{r(\delta)}\to u_*$ при $\delta\to 0$, где u_* — ближайшее к u_0 квазирешение уравнения (1.1).

Если начальная погрешность представима в виде

$$u_0-u_*=|A|^p v,\ p>0,\ \|v\|\leqslant\rho\quad (|A|=(A^*A)^{1/2}) \tag{1.18}$$

и выполнены условия (1.4) и (1.5), то при выборе

$$r=d_p\rho^{2/(p+1)}\delta^{-2/(p+1)},\qquad d_p=(p\gamma_{p/2}/\gamma_*)^{2/(p+1)} \tag{1.19}$$

справедлива оценка

$$\|u_r-u_*\|\leqslant c_p\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)},\quad 0<p\leqslant 2p_0, \tag{1.20}$$

$$c_p=(p^{1/(p+1)}+p^{-p/(p+1)})\gamma_*^{p/(p+1)}\gamma_{p/2}^{1/(p+1)}. \tag{1.21}$$

Доказательство. Для приближения (1.3) имеем

$$u_r-u_*=(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u_*)+g_r(A^*A)A^*(f_\delta-f) \tag{1.22}$$

(мы учли, что $A^*Au_*=A^*f$). По лемме 5.3 гл. II

$$\|(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u_*)\|\to 0 \text{ при } r\to\infty. \tag{1.23}$$

Пользуясь полярным разложением $A^*=(A^*A)^{1/2}U^*$ (см. (3.30) гл. II), получаем

$$\|g_r(A^*A)A^*\|=\|g_r(A^*A)(A^*A)^{1/2}\|\leqslant \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}\lambda^{1/2}|g_r(\lambda)|\leqslant\gamma_* r^{1/2},$$

поэтому

$$\|g_r(A^*A)A^*(f_\delta - f)\| \leqslant \gamma_* r^{1/2}\delta. \qquad (1.24)$$

Из (1.22)—(1.24) на основании условия (1.17) получаем сходимость $\|u_{r(\delta)} - u_*\| \to 0$ при $\delta \to 0$.

В случае начальной погрешности (1.18) условие (1.5) дает

$$\|(I - A^*Ag_r(A^*A))(u_0 - u_*)\| = \|(I - A^*Ag_r(A^*A))(A^*A)^{p/2}v\| \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_{p/2} r^{-p/2}\rho$$

и $\|u_r - u_*\| \leqslant \gamma_{p/2} r^{-p/2}\rho + \gamma_* r^{1/2}\delta$, $0 < p \leqslant 2p_0$. Минимизируя по r, получаем (1.19)—(1.21). Теорема 1.2 доказана.

Замечания. 1. Теорема 1.2 сохраняет силу и в случае линейного неограниченного замкнутого оператора $A : \mathscr{D}(A) \subset H \to F$, $\overline{\mathscr{D}(A)} = H$, если в условиях (1.4)—(1.7) $a = \infty$.

2. При выборе $r(\delta) = d\delta^{-2}$ существуют такие $f_\delta \in F$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$, что $u_{r(\delta)}$ при $\delta \to 0$ расходится по норме. Все же при любых f_δ ($\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$) имеет место слабая сходимость $u_{r(\delta)} \dashrightarrow u_*$, $\delta \to 0$. Действительно, в силу (1.22) и (1.23) достаточно показать, что $g_{r(\delta)}(A^*A)A^*(f_\delta - f) \dashrightarrow 0$ при $\delta \to 0$. Последняя сходимость вытекает из следующих фактов: $\mathscr{R}(A^*)$ плотно в $\overline{\mathscr{R}(A^*)} = PH$;

$\|g_{r(\delta)}(A^*A)A^*(f_\delta - f)\| \leqslant \gamma_*[r(\delta)]^{1/2}\delta = \gamma_* d^{1/2} = \mathrm{const} \quad (r > 0)$;

$\langle g_r(A^*A)A^*z,\ u\rangle = \langle g_r(A^*A)A^*z,\ Pu\rangle$;

$|\langle g_{r(\delta)}(A^*A)A^*(f_\delta - f),\ A^*z\rangle| \leqslant (1 + \gamma_0)\|z\|\delta \to 0$ при $\delta \to 0$.

Выбор $r = d\delta^{-2}$ будет еще раз обсуждаться в разд. 5.

3. Если $\sigma(|A|) = [0, a]$, а условия (1.4) и (1.5) имеют место со знаком равенства, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие v ($\|v\| = \rho$) и f_δ ($\|f_\delta - f\| = \delta$), что в случае начальной погрешности (1.18) при всех $r > 0$ выполняется неравенство

$$\|u_r - u_*\| > \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{2}} c_p \rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}, \quad 0 < p \leqslant 2p_0, \qquad (1.25)$$

где c_p — определенная в (1.21) постоянная.

Доказательство такое же, как для (1.16).

1.4. **Применение к итерационным методам.** Пусть функция $g : [0, a] \to R$ удовлетворяет условиям леммы 4.1 гл. II. Тогда итерационные методы

$$u_n = u_{n-1} - g(A)(Au_{n-1} - f_\delta), \quad n = 1, 2, \ldots \quad (A = A^* \geqslant 0) \qquad (1.26)$$

и

$$u_n = u_{n-1} - g(A^*A)A^*(Au_{n-1} - f_\delta), \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (1.27)$$

укладываются в рамки условий {(1.2), (1.4), (1.5)} и {(1.3), (1.4), (1.5)} соответственно с той оговоркой, что параметр $r = n$ принимает только натуральные значения. С учетом асимптотических значений постоянных (см. лемму 4.1 гл. II) $\hat{\gamma} = g(0)$, $\hat{\gamma}_* = \theta[g(0)]^{1/2}$, $\hat{\gamma}_p = p^p(g(0)e)^{-p}$, из теорем 1.1 и 1.2 получаем следующие результаты.

Теорема 1.3 Пусть $H = F$, $A = A^* \geqslant 0$, $\|A\| \leqslant a$, $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. Остановим итерации (1.26) на некотором $n = n(\delta)$.

Если $n(\delta)\to\infty$, $\delta n(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$, то $u_{n(\delta)}\to u_*$ при $\delta\to 0$, где u_* — ближайшее к u_0 решение уравнения (1.1). Если начальная погрешность представима в виде (1.9), то при выборе (int — целая часть) $n(\delta)=\operatorname{int}(\hat{d}_p\rho^{1/(p+1)}\delta^{-1/(p+1)})$, $\hat{d}_p=pe^{-p/(p+1)}/g(0)$, справедлива асимптотическая оценка погрешности

$$\varlimsup_{\delta\to 0}\frac{\|u_{n(\delta)}-u_*\|}{\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}}\leqslant\hat{c}_p,\quad \hat{c}_p=(p+1)\,e^{-p/(p+1)},\quad 0<p<\infty. \tag{1.28}$$

Теорема 1.4. Пусть $A\in\mathscr{L}(H,\ F)$, $\|A\|^2\leqslant a$, $Qf\in\mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$. Остановим итерации (1.27) на некотором $n=n(\delta)$. Если $n(\delta)\to\infty$, $\delta^2 n(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$, то $u_{n(\delta)}\to u_*$ при $\delta\to 0$, где u_* — ближайшее к u_0 квазирешение уравнения (1.1). Если начальная погрешность представима в виде (1.18), то при выборе $n(\delta)=\operatorname{int}(\hat{d}_p\rho^{2/(p+1)}\delta^{-2/(p+1)})$, $\hat{d}_p=p^{(p+2)/(p+1)}(2e)^{-p/(p+1)}\theta^{2/(p+1)}/$ $/g(0)$, имеет место асимптотическая оценка погрешности

$$\varlimsup_{\delta\to 0}\frac{\|u_{n(\delta)}-u_*\|}{\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}}\leqslant\hat{c}_p,\quad \hat{c}_p=\frac{(p+1)\,\theta^{p/(p+1)}}{(2pe)^{p/(2p+2)}},\quad 0<p<\infty. \tag{1.29}$$

1.5. **Обсуждение.** В условиях теорем 1.1 и 1.2 сходимость $u_{r(\delta)}\to u_*$ получена для любого $f\in\mathscr{R}(A)$ (в теореме 1.2 даже для любого f с $Qf\in\mathscr{R}(A)$). Поэтому методы {(1.2), (1.8} и {(1.3), (1.17)} представляют собой регуляризаторы задачи (1.1). Введем, как и в гл. I, множества

$$\mathscr{M}_{p\rho u_0}=\{u\in H: u-u_0=|A|^p v, \|v\|\leqslant\rho\},\qquad \mathscr{M}_{p\rho}=\mathscr{M}_{p\rho 0},$$
$$p>0, \rho>0. \tag{1.30}$$

Оценка (1.20) свидетельствует об оптимальном порядке метода {(1.3), (1.19)} на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$ при $0<p\leqslant 2p_0$ и любом $\rho>0$ (см. гл. I, п. 4.1). Аналогично оценка (1.11) свидетельствует об оптимальном порядке метода {(1.2), (1.10)} на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$ при $0<p\leqslant p_0$, $\rho>0$ в случае самосопряженной задачи (1.1). Если $c_p=1$, то соответствующий метод оптимален по точности на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$; конечно, оценки (1.11) и (1.20) в таком случае должны быть неулучшаемыми. При выводе этих оценок мы в выражениях погрешности (1.13) и (1.22) оценили оба члена в отдельности и применили неравенство треугольника, поэтому нет оснований ожидать, что оценки будут неулучшаемыми. Мера возможной неточности оценок (1.11) и (1.20) характеризуется неравенствами (1.16) и (1.25). Кроме того, неравенство (1.16) позволяет делать следующий вывод: если (1.12) выдает $c_p>\sqrt{2}$, то метод неоптимален на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$ при всяком выборе $r=r(\delta)$. Аналогично из (1.25) следует неоптимальность метода (1.3) на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$ при всяком выборе $r=$ $=r(\delta)$, если (1.21) выдает $c_p>\sqrt{2}$.

Есть все же методы, оптимальность которых на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$ удается установить на основе оценок {(1.11), (1.12)} и {(1.20), (1.21)}. Для одного из вариантов спектральной срезки (см. гл. II, п. 3.6) имеем $\gamma=1$, $\gamma_p=p^p(1+p)^{-(1+p)}$, и подсчет постоянной

(1.12) дает $c_p=1$ при всех $p\in[0, \infty)$. Таким образом, для задачи (1.1) с $H=F$, $A=A^*\geqslant 0$ метод

$$u_r=A^{-1}[I-P(r^{-1})]f_\delta+rP(r^{-1})f_\delta, \quad r=p(p+1)^{-1}\rho^{1/(p+1)}\delta^{-1/(p+1)}$$

оптимален на $\mathscr{M}_{p\rho}$ при всех $p>0$, $\rho>0$.

В общем случае, переходя с помощью полярного разложения $A=U|A|$ от несамосопряженной задачи (1.1) к самосопряженной $|A|u=U^*f$, получаем (для общего случая) оптимальный на $\mathscr{M}_{p\rho}$ метод

$$u_r=|A|^{-1}[I-P(r^{-1})]U^*f_\delta+rP(r^{-1})U^*f_\delta,$$
$$r=p(p+1)^{-1}\rho^{1/(p+1)}\delta^{-1/(p+1)}.$$

Здесь $P(\lambda)$ — спектральное семейство проекторов оператора $|A|$.

Для метода А. Н. Тихонова имеем (см. гл. II, лемму 1.1) $\gamma_*=1/2$, $\gamma_p=p^p(1-p)^{1-p}$, и при $p=1$ (1.21) дает $c_1=1$. Таким образом, метод А. Н. Тихонова $u_\alpha=(\alpha I+A^*A)^{-1}A^*f_\delta$, $\alpha=\rho^{-1}\delta$, оптимален на $\mathscr{M}_{1\rho}$. Проиллюстрируем зависимость c_p от p в случае метода А. Н. Тихонова табличкой значений:

p	0	0,1	0,25	0,5	1,0	2,0
c_p	1,00	1,07	1,06	1,03	1,00	1,19

Как видно, c_p при $0\leqslant p\leqslant 2$ близко к 1, но вопрос об оптимальности метода на $\mathscr{M}_{p\rho}$ при $p\neq 1$ остается открытым.

Для итераций (1.26) с помощью (1.28) получаем

p	0	0,1	0,25	0,5	1	2	3	4	∞
$\hat c_p$	1,00	1,01	1,02	1,07	1,21	1,54	1,89	2,25	∞

Для итераций (1.27) формула (1.29) дает следующие значения $\hat c_p$:

p	0	0,1	0,25	0,5	1	2	3	4	5	∞
$\hat c_p$	1,00	1,09	1,11	1,08	1,05	1,01	1,01	1,02	1,05	∞

Итерационные методы заведомо не будут асимптотически оптимальными на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$ при больших p, ибо $\hat c_p\to\infty$ при $p\to\infty$; при умеренных p вопрос об асимптотической оптимальности остается открытым. В разд. 2 мы проведем более тщательный анализ, позволяющий ответить на поставленные вопросы.

2. Анализ оптимальности методов

2.1. **Лемма о полунормах.** В [91] установлен следующий результат: для любых гильбертовых полунорм $|\cdot|_i$ ($i=0, 1, 2$) на гильбертовом пространстве X имеет место равенство

$$\sup_{|x|_1\leqslant 1, |x|_2\leqslant 1}|x|_0=\min_{0\leqslant t\leqslant 1}\ \sup_{[t|x|_1^2+(1-t)|x|_2^2]^{1/2}\leqslant 1}|x|_0.$$

Этому утверждению можно придать следующую форму.

Лемма 2.1. Пусть X и X_i $(i=0,\ 1,\ 2)$ — гильбертовы пространства, $C_i \in \mathscr{L}(X,\ X_i)$ $(i=0,\ 1,\ 2)$ — линейные непрерывные операторы, причем $\|C_0x\|^2/(\|C_1x\|^2+\|C_2x\|^2) \leqslant c = \mathrm{const}$. Тогда

$$\sup_{C_1x\| \leqslant 1, \|C_2p\| \leqslant 1} \|C_0x\| = \inf_{0<t<1} \sup_{[t\|C_1x\|^2+(1-t)\|C_2x\|^2]^{1/2} \leqslant 1} \|C_0x\|.$$

Вместо инфимума по $t \in (0,\ 1)$ здесь можно написать минимум по $t \in [0,\ 1]$ — он достигается.

2.2. **Наибольшее отклонение приближений.** Введем множество $\mathscr{M}_{B\rho u_0} = \{u \in H\colon\ u - u_0 = Bv,\ \|v\| \leqslant \rho\}$, где B — некоторый линейный непрерывный оператор из некоторого гильбертова пространства G в H.

Лемма 2.2. Пусть $H=F$, $A=A^* \geqslant 0$, $\|A\| \leqslant a$. Тогда для приближения (1.2)

$$\sup_{u \in \mathscr{M}_{B\rho u_0}, f_\delta \in F, \|Au-f_\delta\| \leqslant \delta} \|u_r - u\| =$$

$$= \inf_{0<t<1} \left\| \frac{1}{t} \rho^2 (I - Ag_r(A)) BB^* (I - A\bar{g}_r(A)) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1-t} \delta^2 g_r(A) \bar{g}_r(A) \right\|^{1/2}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Для приближения (1.2) и любого $u \in H$ имеем $u_r - u = (I - Ag_r(A))(u_0 - u) + g_r(A)(f_\delta - Au)$, поэтому

$$\sup_{u \in \mathscr{M}_{B\rho u_0}, f_\delta \in F, \|Au-f_\delta\| \leqslant \delta} \|u_r - u\| = \sup_{\|v\| \leqslant \rho, \|z\| \leqslant \delta} \|(I - Ag_r(A)) Bv +$$

$$+ g_r(A) z\| = \sup_{\|v\| \leqslant 1, \|z\| \leqslant 1} \|\rho (I - Ag_r(A) Bv + \delta g_r(A) z\|.$$

Применим лемму 2.1, положив $X = G \times F$, $X_0 = H$, $X_1 = G$, $X_2 = F (= H)$,

$$C_0 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} = \rho (I - Ag_r(A)) Bv + \delta g_r(A) z,$$

$$C_1 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} = v,\ C_2 \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} = z, \qquad x = \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \in X = G \times F.$$

В результате получим

$$\sup_{u \in \mathscr{M}_{B\rho u_0}, f_\delta \in F, \|Au-f_\delta\| \leqslant \delta} \|u_r - u\| = \inf_{0<t<1} \sup_{[t\|v\|^2+(1-t\|z\|^2]^{1/2} \leqslant 1} \|\rho (I -$$

$$- Ag_r(A)) Bv + \delta g_r(A) z\| = \inf_{0<t<1} \|C_0\|_{\mathscr{L}(G_t \times F_{1-t}, H)},$$

где $G_t \times F_{1-t}$ — гильбертово пространство, по составу элементов совпадающее с $G \times F$, но снабженное скалярным произведением, порожденным скалярными произведениями $\langle v_1, v_2 \rangle_{G_t} = t \langle v_1,\ v_2 \rangle_G$, $\langle z_1, z_2 \rangle_{F_{1-t}} = (1-t) \langle z_1,\ z_2 \rangle_F$. Сопряженный к $C_0 \in \mathscr{L}(G_t \times F_{1-t},\ H)$

оператор $C_0^* \in \mathscr{L}(H, G_t \times F_{1-t})$, как легко проверить, действует по формуле

$$C_0^* u = \begin{pmatrix} t^{-1}\rho B^*(I - A\bar{g}_r(A))u \\ (1-t)^{-1}\delta \bar{g}_r(A)u \end{pmatrix}, \quad u \in H.$$

Значит,

$$\|C_0\|_{\mathscr{L}(G_t \times F_{1-t}, H)} = \|C_0 C_0^*\|^{1/2}_{\mathscr{L}(H,H)} = \|t^{-1}\rho^2(I - Ag_r(A))BB^*(I -$$
$$- A\bar{g}_r(A)) + (1-t)^{-1}\delta^2 g_r(A)\,\bar{g}_r(A)\|^{1/2}_{\mathscr{L}(H,H)},$$

и мы приходим к равенству (2.1). Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. Для приближения (1.3)

$$\sup_{u \in \mathscr{M}_{B\rho u_0}, f_\delta \in F, \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta} \|u_r - u\| = \inf_{0<t<1} \Big\| \frac{1}{t}\rho^2 (I -$$
$$- A^*Ag_r(A^*A))BB^*(I - A^*Ag_r(A^*A)) +$$
$$+ \frac{1}{1-t}\delta^2 g_r(A^*A)\,A^*A\bar{g}_r(A^*A)\Big\|^{1/2}.$$

Доказательство вполне аналогично доказательству леммы 2.2.

2.3. **Наибольшее отклонение в случае класса истокопредставимых решений.** Введем дополнительное условие (см. гл. II, п. 3.6)

$$g_r(\lambda) = rg(r\lambda) \quad (0 \leqslant \lambda < \infty), \ r > 0, \tag{2.2}$$

где g: $[0, \infty) \to R$ — такая измеримая по Борелю функция, что

$$\left.\begin{aligned} &\gamma \equiv \sup_{0 \leqslant \lambda < \infty} |g(\lambda)| < \infty, \\ &\gamma_p \equiv \sup_{0 \leqslant \lambda < \infty} \lambda^p |1 - \lambda g(\lambda)| < \infty \quad (0 \leqslant p \leqslant p_0), \quad p_0 > 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Положим $B = |A|^p$, $p > 0$, т. е. в качестве $\mathscr{M}_{B\rho u_0}$ рассмотрим определенное в (1.30) множество $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$.

Теорема 2.1. Пусть $H = F$, $A = A^* \geqslant 0$ и выполнены условия (2.2) и (2.3). Тогда для приближения (1.2) при

$$r = d\rho^{1/(p+1)}\delta^{-1/(p+1)}, \quad d > 0 \tag{2.4}$$

справедливо равенство

$$\sup_{u \in \mathscr{M}_{p\rho u_0}, f_\delta \in F, \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta} \|u_r - u\| = c_{d,p\rho\delta}\,\rho^{1/(p+1)}\,\delta^{p/(p+1)}, \tag{2.5}$$

где

$$c_{dp\rho\delta} = \inf_{0<t<1} \sup_{\mu \in \sigma(d\rho^{1/(p+1)}\delta^{-1/(p+1)}A)} \varphi_\rho^1(d, t, \mu), \tag{2.6}$$

$$\varphi_p^1(d, t, \mu) = \left[\frac{d^{-2p}}{t}\mu^{2p}|h(\mu)|^2 + \frac{d^3}{1-t}|g(\mu)|^2\right]^{1/2},$$

$$h(\mu) = 1 - \mu g(\mu). \tag{2.7}$$

Доказательство. Формула (2.1) приобретает вид

$$\sup_{u\in\mathcal{M}_{p\rho u_0}, f_\delta\in F, \|Au-f_\delta\|\leqslant\delta}\|u_r-u\| = \inf_{0<t<1}\sup_{\lambda\in\sigma(A)}\left[\frac{1}{t}\rho^2\lambda^{2p}|1-\right.$$

$$\left.-r\lambda g(r\lambda)|^2+\frac{1}{1-t}\delta^2r^2|g(r\lambda)|^2\right]^{1/2}=$$

$$=\inf_{0<t<1}\sup_{\mu\in\sigma(rA)}\left[\frac{1}{t}\rho^2(\mu/r)^{2p}|h(\mu)|^2+\frac{1}{1-t}\delta^2r^2|g(\mu)|^2\right]^{1/2}.$$

При r из (2.4) это дает (2.5). Теорема 2.1 доказана.

Пренебрегая тонкостями, вызываемыми спектром оператора A, можно рекомендовать такое значение d в (2.4), при котором достигается минимакс

$$\inf_{d>0}\inf_{0<t<1}\sup_{0\leqslant\mu<\infty}\varphi_p^1(d,t,\mu)\equiv c_p. \tag{2.8}$$

Тогда вместо (2.5) получаем

$$\sup_{u\in\mathcal{M}_{p\rho u_0}, f_\delta\in F, \|Au-f_\delta\|\leqslant\delta}\|u_r-u\|\leqslant c_p\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}. \tag{2.9}$$

Заметим, что при $p\in(0, p_0]$ функция $\varphi_p{}^1(d, t, \mu)$ ограничена по μ.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия (2.2) и (2.3). Тогда для приближения (1.3) при

$$r=d\rho^{2/(p+1)}\delta^{-2/(p+1)},\ d>0 \tag{2.10}$$

справедливо равенство (2.5), в котором

$$c_{dp\rho\delta}=\inf_{0<t<1}\sup_{\mu\in\sigma(d\rho^{2/(p+1)}\delta^{-2/(p+1)}A^*A)}\varphi_p^2(d,t,\mu), \tag{2.11}$$

$$\varphi_p^2(d,t,\mu)=\left[\frac{d^{-p}}{t}\mu^p|h(\mu)|^2+\frac{d}{1-t}\mu|g(\mu)|^2\right]^{1/2}. \tag{2.12}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1.

Пренебрегая опять тонкостями, вызываемыми спектром оператора A^*A, можно рекомендовать выбор параметра (2.10) с постоянной d, при которой достигается минимакс

$$\inf_{d>0}\inf_{0<t<1}\sup_{0\leqslant\mu<\infty}\varphi_p^2(d,t,\mu)\equiv c_p. \tag{2.13}$$

Тогда вместо (2.5) получаем оценку (2.9) с c_p, определенным в (2.13). Заметим, что при $p\in(0, 2p_0]$ функция $\varphi_p{}^2(d, t, \mu)$ ограничена по μ.

2.4. **Стационарные точки.** Знание стационарных точек функций $\varphi_p{}^1(d, t, \mu)$ и $\varphi_p{}^2(d, t, \mu)$ облегчает решение минимаксных задач (2.8) и (2.13).

Лемма 2.4. Пусть функция $g(\lambda)$ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет (2.3) и пусть функция $h(\lambda)=1-\lambda g(\lambda)$ строго убывает, $h'(\lambda)<0$ $(0\leqslant\lambda<\infty)$. Тогда при $0<p\leqslant p_0$ фун-

кция $\varphi_p^1(d, t, \mu)$ имеет в области $d>0$, $0<t<1$, $\mu>0$ единственную стационарную точку, а именно точку с координатами

$$d=h^{-1}(1/(p+1)),\quad t=1/(p+1),\quad \mu=h^{-1}(1/(p+1)). \qquad (2.14)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу наложенных условий функция h переводит $(0, \infty)$ взаимно однозначно на $(0, 1)$.

В (2.7) проведем замену $g(\mu)=\mu^{-1}(1-h(\mu))$. Приравнивая к нулю первые частные производные $\varphi_p^1(d, t, \mu)$ по d, t и μ, получаем для определения стационарных точек условия

$$-2pt^{-1}d^{-2p-1}\mu^{2p}h^2(\mu)+2(1-t)^{-1}d\mu^{-2}(1-h(\mu))^2=0,$$

$$-t^{-2}d^{-2p}\mu^{2p}h^2(\mu)+(1-t)^{-2}d^2\mu^{-2}(1-h(\mu))^2=0,$$

$$t^{-1}d^{-2p}[2p\mu^{2p-1}h^2(\mu)+2\mu^{2p}h(\mu)h'(\mu)]+(1-t)^{-1}d^2[-2\mu^{-3}(1-$$
$$-h(\mu))^2-2\mu^{-2}(1-h(\mu))h'(\mu)]=0.$$

Первые два уравнения представляют собой линейную однородную систему относительно $\mu^{2p}h^2(\mu)$ и $\mu^{-2}(1-h(\mu))^2$, поэтому в стационарной точке

$$\begin{vmatrix} -2pt^{-1}d^{-2p-1} & 2(1-t)^{-1}d \\ -t^{-2}d^{-2p} & (1-t)^{-2}d^2 \end{vmatrix}=0,$$

откуда $t=1/(p+1)$. Если умножить первое уравнение на d, то совместно с третьим оно представляет собой линейную однородную относительно $t^{-1}d^{-2p}$ и $(1-t)^{-1}d^2$ систему, поэтому в стационарной точке

$$\begin{vmatrix} -2p\mu^{2p}h^2(\mu) & 2\mu^{-2}(1-h(\mu))^2 \\ 2p\mu^{2p-1}h^2(\mu)+2\mu^{2p}h(\mu)h'(\mu) & -2\mu^{-3}(1-h(\mu))^2-2\mu^{-2}(1- \\ -2p\mu^{2p}h^2(\mu) & -h(\mu))h'(\mu) \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} -ph^2(\mu) & (1-h(\mu))^2 \\ h(\mu)h'(\mu) & -(1-h(\mu))h'(\mu) \end{vmatrix}=0.$$

Учитывая, что $0<h(\mu)<1$, $h'(\mu)\neq 0$ при $0<\mu<\infty$, получаем для μ уравнение $h(\mu)=1/(p+1)$, откуда $\mu=h^{-1}(1/(p+1))$. Наконец, из первого уравнения с учетом найденных значений t и μ получаем $d=h^{-1}(1/(p+1))$. Лемма 2.4 доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 2.5. Пусть выполнены условия леммы 2.4. Тогда при $0<p\leqslant 2p_0$ функция $\varphi_p^2(d, t, \mu)$ имеет в области $d>0$, $0<t<1$, $\mu>0$ единственную стационарную точку, а именно точку с координатами (2.14).

2.5. **Условия оптимальности методов.** Теперь мы в состоянии сформулировать и доказать центральные результаты раздела.

Теорема 2.3. Пусть $H=F$, $A=A^*\geqslant 0$ и пусть функция

g: $[0, \infty) \to R$ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям (2.3), причем функция $h(\lambda) = 1 - \lambda g(\lambda)$ строго убывает, $h'(\lambda) < 0$ $(0 \leqslant \lambda < \infty)$. Если при некотором $p \in (0, p_0]$

$$\psi_p^1(\mu) \equiv (p+1)\,[h^{-1}(1/(p+1))]^{-2p} \mu^{2p} h^2(\mu) + \\ + (p+1)\,p^{-1}\,[h^{-1}(1/(p+1))]^2\, g^2(\mu) \leqslant 1 \quad (0 \leqslant \mu < \infty), \tag{2.15}$$

то для приближения (1.2) с порождающей системой функций (2.2) при

$$r = h^{-1}(1/(p+1))\,\rho^{1/(p+1)}\delta^{-1/(p+1)} \tag{2.16}$$

справедлива оценка

$$\sup_{u \in \mathcal{M}_{p\rho u_0}, f_\delta \in F, \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta} \|u_r - u\| \leqslant \rho^{1/(p+1)}\delta^{p/ p+1)}, \tag{2.17}$$

т. е. метод $\{(1.2), (2.16)\}$ оптимален по точности на $\mathcal{M}_{p\rho u_0}$ по крайней мере для тех $\delta > 0$, для которых $(\delta/\rho)^{1/(p+1)} \in \sigma(A)$ (см. п. 4.1 гл. I). Если же неравенство (2.15) при некотором $\mu \in \in [0, \infty)$ нарушено, то для операторов $A = A^* \geqslant 0$ с $\sigma(A) \supseteq [0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, при достаточно малых $\delta > 0$ и всех $r > 0$ имеет место неравенство

$$\sup_{u \in \mathcal{M}_{p\rho u_0}, f_\delta \in F, \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta} \|u_r - u\| > \rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}, \tag{2.18}$$

т. е. метод (1.2) не будет оптимальным на $\mathcal{M}_{p\rho u_0}$ ни при каком выборе параметра $r = r(\delta, \mathcal{M}_{p\rho u_0})$.

Точка $\mu = h^{-1}(1/(p+1))$ стационарна для $\psi_p{}^1(\mu)$, и

$$\psi_p{}^1(h^{-1}(1/(p+1))) = 1. \tag{2.19}$$

Доказательство. В силу теоремы 2.1

$$\inf_{r>0} \sup_{u \in \mathcal{M}_{p\rho u_0}, f_\delta \in F, \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta} \|u_r - u\| = c_{p\rho\delta}\,\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)},$$

где $c_{p\rho\delta} = \inf\limits_{d>0} c_{dp\rho\delta} \leqslant c_p$, а c_p определен в (2.8). При этом $c_{p\rho\delta} \to c_p$ при $\delta \to 0$, если $\sigma(A) \supseteq [0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Если $c_p = 1$, то при соответствующих d и r (см. (2.4)) имеем оценку (2.17); если же $c_p > 1$, $\sigma(A) \supseteq [0, \varepsilon]$, а $\delta > 0$ достаточно мало, то при всех $r > 0$ имеем неравенство (2.18). Таким образом, суть доказательства теоремы заключается в установлении равносильности условий (2.15) и $c_p = 1$.

Элементарный подсчет показывает, что $\varphi_p{}^1(d, h(d), d) = 1$ при всех $d > 0$. В частности, в стационарной точке (2.14)

$$\varphi_p{}^1(h^{-1}(1/(p+1)),\ 1/(p+1),\ h^{-1}(1/(p+1))) = 1. \tag{2.20}$$

Нетрудно убедиться, что функция $[\varphi_p{}^1(d, t, \mu)]^2 = d^{-2p} t^{-1} \mu^{2p} h^2(\mu) + d^2(1-t)^{-1} g^2(\mu)$ строго выпукла по совокупности переменных d и t, поэтому в стационарной точке она достигает минимума: $[\varphi_p{}^1(d, t, h^{-1}(1/(p+1)))]^2 > 1$ при всех $(d, t) \neq \neq (h^{-1}(1/(p+1)), 1/(p+1))$. Значит, равенство $c_p = 1$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi_p{}^1(h^{-1}(1/(p+1)), 1/(p+1), \mu) \leqslant 1$

($0 \leqslant \mu < \infty$) (минумум по d и t в определении c_p (см. (2.8)) тогда достигается при $d = h^{-1}(1/(p+1))$, $t = 1/(p+1)$). Последнее неравенство равносильно условию (2.15), так как

$$\psi_p^1(\mu) = [\varphi_p^1(h^{-1}(1/(p+1)), 1/(p+1), \mu)]^2. \qquad (2.21)$$

Итак, $c_p = 1$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.15). Этим завершено доказательство оценок (2.17) и (2.18).

Утверждение о стационарной точке функции $\psi_p{}^1(\mu)$ вытекает из леммы 2.4 и равенств (2.20) и (2.21). Теорема 2.3 доказана.

Теорема 2.4. Пусть $A \in \mathscr{L}(H, F)$ и пусть функция g. $[0, \infty) \to R$ удовлетворяет перечисленных в теореме 2.3 условиям. Если при некотором $p \in (0, 2p_0]$

$$\psi_p^2(\mu) \equiv (p+1)[h^{-1}(1/(p+1))]^{-p} \mu^p h^2(\mu) + \\ + p^{-1}(p+1) h^{-1}(1/(p+1)) \mu g^2(\mu) \leqslant 1 \quad (0 \leqslant \mu < \infty), \qquad (2.22)$$

то для приближения (1.3) с порождающей системой функций (2.2) при

$$r = h^{-1}(1/(p+1)) \rho^{2/(p+1)} \delta^{-2/(p+1)} \qquad (2.23)$$

справедлива оценка (2.17), т. е. метод $\{(1.3), (2.23)\}$ оптимален по точности на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$ по крайней мере для тех $\delta > 0$, для которых $(\delta/\rho)^{2/(p+1)} \in \sigma(A^*A)$. Если же неравенство (2.22) при некотором $\mu \in [0, \infty)$ нарушено, то для операторов $A \in \mathscr{L}(H, F)$ с $\sigma(A^*A) \supseteq [0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, при достаточно малых $\delta > 0$ и всех $r > 0$ имеет место неравенство (2.18), т. е. метод (1.3) не будет оптимальным на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$ ни при каком выборе параметра $r = r(\delta, \mathscr{M}_{p\rho u_0})$.

Точка $\mu = h^{-1}(1/(p+1))$ стационарна для $\psi_p{}^2(\mu)$, и

$$\psi_p^2(h^{-1}(1/(p+1))) = 1. \qquad (2.24)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.3.

2.6. Оптимальность методов М. М. Лаврентьева и А. Н. Тихонова.

Метод М. М. Лаврентьева

$$u_\alpha = (\alpha I + A)^{-1} f_\delta \quad (\alpha = r^{-1};\ A = A^* \geqslant 0) \qquad (2.25)$$

укладывается в схему методов $\{(1.2), (2.2)\}$ с $u_0 = 0$, $g(\lambda) = (1+\lambda)^{-1}$. Метод А. Н. Тихонова

$$u_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1} A^* f_\delta \quad (\alpha = r^{-1}) \qquad (2.26)$$

укладывается в схему методов $\{(1.3), (2.2)\}$ с $u_0 = 0$ и той же функцией $g(\lambda)$. Условия (2.3) выполнены с $p_0 = 1$; функция $g(\lambda) = (1+\lambda)^{-1}$ удовлетворяет и прочим ограничениям теоремы 2.3. Условия (2.15) и (2.22) в данном случае принимают соответственно вид

$$\psi_p{}^1(\mu) \equiv (p+1)(p^{-2p}\mu^{2p} + p)(1+\mu)^{-2} \leqslant 1 \quad (0 \leqslant \mu < \infty), \qquad (2.27)$$

$$\psi_p{}^2(\mu) \equiv (p+1)(p^{-p}\mu^p + \mu)(1+\mu)^{-2} \leqslant 1 \quad (0 \leqslant \mu < \infty). \qquad (2.28)$$

Элементарный анализ показывает, что условие (2.27) выполнено для $p \in (0, p_\Lambda]$, где $p_\Lambda = {}^1/_2(\sqrt{5}-1) \approx 0{,}618$; для $p > p_\Lambda$ имеем $\psi_p{}^1(0) = (p+1)p > 1$. В данном случае $h(\lambda) = g(\lambda) = (1+\lambda)^{-1}$, $h^{-1}(1/(p+1)) = p$. Таким образом, метод М. М. Лаврентьева (2.25) с выбором параметра $\alpha = p^{-1}\rho^{-1/(p+1)}\delta^{1/(p+1)}$ при $0 < p \leqslant p_\Lambda$ оптимален на $\mathscr{M}_{p\rho} = \mathscr{M}_{p\rho u_0}$:

$$\sup_{u \in M_{p\rho}, f_\delta \in F, \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta} \|u_\alpha - u\| \leqslant \rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(r+1)}. \tag{2.29}$$

При $p > p_\Lambda$ метод М. М. Лаврентьева не будет оптимальным на $\mathscr{M}_{p\rho}$ ни при каком выборе $\alpha = \alpha(\delta, \mathscr{M}_{p\rho})$; при $p > 1$ он теряет даже оптимальный порядок.

Нетрудно убедиться, что условие (2.28) выполнено при $0 < p \leqslant 2$. Таким образом, метод А. Н. Тихонова (2.26) с выбором параметра $\alpha = p^{-1}\rho^{-2/(p+1)}\delta^{2/(p+1)}$ при $0 < p \leqslant 2$ оптимален на $\mathscr{M}_{p\rho}$, т. е. справедлива оценка (2.29). При $p > 2$ метод А. Н. Тихонова теряет оптимальный порядок на $\mathscr{M}_{p\rho}$.

2.7. **Оптимальность непрерывного аналога итерационных методов.** Непрерывные аналоги итерационных методов (методы задачи Коши)

$$u'(t) + Au(t) = f_\delta, \quad u(0) = u_0 \quad (t = r; \ A = A^* \geqslant 0) \tag{2.30}$$

и

$$u'(t) + A^*Au(t) = A^*f_\delta, \quad u(0) = u_0 \quad (t = r) \tag{2.31}$$

укладываются в рамки методов {(1.2), (2.2)} и {(1.3), (2.2)} с $g(\lambda) = \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda})$, $h(\lambda) = e^{-\lambda}$. Условия (2.3) выполнены с $p_0 = \infty$; выполнены и прочие условия, наложенные на эти функции в теореме 2.3. Условия (2.15) и (2.22) в данном случае принимают вид

$$\psi_p^1(\mu) \equiv (p+1)\{[\ln(1+p)]^{-2p}\mu^{2p}e^{-2\mu} + p^{-1}[\ln(1+p)]^2\mu^{-2}(1 - \\ - e^{-\mu})^2\} \leqslant 1, \tag{2.32}$$

$$\psi_p^2(\mu) \equiv (p+1)\{[\ln(1+p)]^{-p}\mu^{p}e^{-2\mu} + p^{-1}[\ln(1+p)]\mu^{-1}(1 - \\ - e^{-\mu})^2\} \leqslant 1. \tag{2.33}$$

Аналитическое исследование этих условий наталкивается на определенные трудности, поэтому производилась проверка на ЭВМ. Условие (2.32) заведомо нарушено при $p > p_1$, где $p_1 \approx 1{,}043$ — решение уравнения $\psi_p{}^1(0) \equiv (p+1)p^{-1}[\ln(1+p)]^2 = 1$. С другой стороны, численная проверка показала, что при $0 < p \leqslant p_1$ условие (2.32) выполнено. В данном случае $h^{-1}(1/(p+1)) = \ln(1+p)$. Таким образом, метод (2.30) с моментом останова $t = \ln(1+p)\rho^{1/(p+1)}\delta^{-1/(p+1)}$ при $0 < p \leqslant p_1$ оптимален на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$:

$$\sup_{u \in M_{p\rho u_0}, f_\delta \in F, \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta} \|u(t) - u\| \leqslant \rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(r+1)}. \tag{2.34}$$

При $p > p_1$ метод задачи Коши (2.30) не будет оптимальным на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$ ни при каком выборе момента останова $t = t(\delta, \mathscr{M}_{p\rho u_0})$.

Условие (2.33) заведомо нарушено при $p > p'$, где $p' \approx 7{,}172$ —

решение уравнения $p^2-4p\ln(p+1)+2[\ln(p+1)]^2=0$, а именно: при $p<p'$ стационарная точка $\mu=h^{-1}(1/(p+1))=\ln(1+p)$ для $\psi_p^2(\mu)$ является точкой максимума, а при $p>p'$ — точкой минимума. Однако проверка на ЭВМ показала, что условие (2.33) выполнено лишь при $0<p\leqslant p_2$, $p_2\approx 7{,}124$. Таким образом, метод задачи Коши (2.31) с моментом останова $t=\ln(1+p)\rho^{2/(p+1)}\cdot\delta^{-2/(p+1)}$ при $0<p\leqslant p_2$ оптимален на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$, т. е. справедлива оценка (2.34). При $p>p_2$ метод (2.31) не будет оптимальным на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$ ни при каком выборе момента останова $t=t(\delta, \mathscr{M}_{p\rho u_0})$.

2.8. **Асимптотическая оптимальность итерационных методов**, как будет показано ниже, имеет место на тех же множествах $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$, на которых непрерывные аналоги этих методов оптимальны (см. п. 2.7).

Теорема 2.5. Пусть $H=F$, $A=A^*\geqslant 0$, $\|A\|\leqslant a$ и функция $g:[0, a]\to R$ удовлетворяет условиям леммы 4.1 гл. II. Тогда при $0<p\leqslant p_1\approx 1{,}043$ для итерационных приближений

$$u_n=u_{n-1}-g(A)(Au_{n-1}-f_\delta),\quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{2.35}$$

с остановом на

$$n=n(\delta,\ p,\ \rho)=\operatorname{int}\{\ln(1+p)[g(0)]^{-1}\rho^{1/(p+1)}\delta^{-1/(p+1)}\} \tag{2.36}$$

справедливо соотношение

$$\varlimsup_{\delta\to 0}\frac{\sup\limits_{u\in M_{p\rho u_0}, f_\delta\in F, \|Aa-f_\delta\|\leqslant\delta}\|u_{n(\delta,p,\rho)}-u\|}{\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}}\leqslant 1, \tag{2.37}$$

т. е. метод $\{(2.35),\ (2.36)\}$ асимптотически оптимален на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$.

Теорема 2.6. Пусть $A\in\mathscr{L}(H, F)$, $\|A\|^2\leqslant a$ и функция $g:[0, a]\to R$ удовлетворяет условиям леммы 4.1 гл. II. Тогда при $0<p\leqslant p_2\approx 7{,}124$ для итерационных приближений

$$u_n=u_{n-1}-g(A^*A)A^*(Au_{n-1}-f_\delta),\quad n=1, 2, \ldots \tag{2.38}$$

с остановом на

$$n=n(\delta,\ p,\ \rho)=\operatorname{int}\{\ln(1+p)[g(0)]^{-1}\rho^{2/(p+1)}\delta^{-2/(p+1)}\} \tag{2.39}$$

справедливо соотношение (2.37), т. е. метод $\{(2.38),\ (2.39)\}$ асимптотически оптимален на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$.

Доказательство теоремы 2.5. Итерационный метод (2.35) включается в класс методов (1.2) с порождающей системой функций (см. п. 4.1 гл. II)

$$g_n(\lambda)=\sum_{j=0}^{n-1}(1-\lambda g(\lambda))^j g(\lambda)=\frac{1}{\lambda}[1-(1-\lambda g(\lambda))^n],$$
$$n=1, 2, \ldots.$$

По лемме 2.2

$$\sup_{u\in M_{p\rho u_0},\ f_\delta\in F,\ \|Au-f_\delta\|\leqslant\delta}\|u_n-u\|=$$
$$=\inf_{0<t<1}\sup_{\lambda\in\sigma(A)}\left[\frac{1}{t}\rho^2\lambda^{2p}|1-\lambda g_n(\lambda)|^2+\frac{1}{1-t}\delta^2|g_n(\lambda)|^2\right]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant} \left[(p+1)\rho^2\lambda^{2p}\,|\,1-\lambda g_n(\lambda)\,|^2+\frac{p+1}{p}\delta^2\,|\,g_n(\lambda)\,|^2\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant bn^{-1}}\left[(p+1)\rho^2\lambda^{2p}\,|\,1-\lambda g_n(\lambda)\,|^2+\frac{p+1}{p}\delta^2\,|\,g_n(\lambda)\,|^2\right]^{1/2},\right.$$

$$\left.\left[(p+1)\rho^2\varepsilon^2 n^{-2p}+\frac{p+1}{p}\delta^2\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^{1/2}\right\} \quad (n\geqslant n_\varepsilon).$$

Мы положили $t=1/(p+1)$, а затем воспользовались неравенствами (4.12) и (4.13) гл. II. Здесь $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое число, а b и n_ε — достаточно большие числа, зависящие от ε. Для $n=n(\delta, p, \rho)$, указанного в (2.36), при достаточно малом ε и достаточно большом b имеем

$$\left[(p+1)\rho^2\varepsilon^2 n^{-2p}+\frac{p+1}{p}\delta^2\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^{1/2} \leqslant \rho^{1(p+1)}\delta^{p/(p+1)},$$

и для доказательства (2.37) остается оценить величину

$$s_n(\delta, p, \rho)=\sup_{c\leqslant\lambda\leqslant bn^{-1}}\left[(p+1)\rho^2\lambda^{2p}\,|\,1-\lambda g_n(\lambda)\,|^2+\frac{p+1}{p}\delta^2\,|\,g_n(\lambda)\,|^2\right]^{1/2}.$$

В условиях леммы 4.1 гл. II имеем $g_n(\lambda)\geqslant 0$ $(0\leqslant\lambda\leqslant a)$; кроме того, $1-\lambda g_n(\lambda)=[1-\lambda g(\lambda)]^n\geqslant 0$ $(0\leqslant\lambda\leqslant\alpha)$, где $\alpha\in(0, a]$ не зависит от n. Вводя замену $\lambda=\mu/n$, получаем

$$s_n(\delta, p, \rho)=\sup_{c\leqslant\mu\leqslant b}\left[(p+1)\rho^2 n^{-2p}\mu^{2p}\left(1-\frac{\mu}{n}g\left(\frac{\mu}{n}\right)\right)^{2n}+\right.$$

$$\left.+\frac{p+1}{p}\delta^2 n^2\mu^{-2}\left(1-\left(1-\frac{\mu}{n}g\left(\frac{\mu}{n}\right)\right)^n\right)^2\right]^{1/2}.$$

Ввиду непрерывности $g(\lambda)$ в нуле имеет место сходимость

$$\max_{c\leqslant\mu\leqslant b}\left|\left(1-\frac{\mu}{n}g\left(\frac{\mu}{n}\right)\right)^n-e^{-g(\ )\mu}\right|\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

и при $n=n(\delta, p, \rho)$, указанных в (2.36),

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{s_{n(\delta,p,\rho)}(\delta, p, \rho)}{\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}}=\sup_{c\leqslant\mu<b}\{(p+1)[\ln(1+p)]^{-2p}[g(0)\mu]^{2p}e^{-2g(0)\mu}+$$

$$+\frac{p+1}{p}[\ln(1+p)]^2[g(0)\mu]^{-2}(1-e^{-g(0)\mu})^2\}^{1/2}=\sup_{0\leqslant\mu\leqslant b}[\psi_p^1(g(0)\mu)]^{1/2}$$

(см. (2.32)). Поскольку $\psi_p{}^1(\mu)\leqslant 1$ $(0\leqslant\mu<\infty)$ при $0<p\leqslant p_1$, то при таких p имеет место соотношение (2.37). Теорема 2.5 доказана.

Выбор $d=\ln(1+p)[g(0)]^{-1}$ в (2.36) и $t=1/(p+1)$ в ходе рассуждений был продиктован тем, что стационарная точка (точка максимума в случае $0<p\leqslant p_1$) функции $\varphi_p{}^1(d, t, \mu)$ для непрерывного аналога (2.30) итерационных методов имеет вид (см. (2.14)) $d=\ln(1+p)$, $t=1/(p+1)$, $\mu=\ln(1+p)$.

Доказательство теоремы 2.6 вполне аналогично доказательству теоремы 2.5; вместо леммы 2.2 используется лемма 2.3.

3. Апостериорный выбор параметра регуляризации (принцип невязки)

3.1. **Границы изменения и свойства невязки.** Чтобы правильно сформулировать правила выбора параметра регуляризации r по невязке $\|Au_r—f_\delta\|$, надо хотя бы приблизительно знать границы ее изменения. Практический выбор r упрощается, если невязка $\|Au_r—f_\delta\|$ является непрерывной монотонной функцией от r.

Лемма 3.1. Пусть выполнены условия (1.4) и (1.6), (1.7). Тогда как для приближения (1.2), так и для приближения (1.3)

$$\lim_{r\to 0}\|Au_r-f_\delta\|=\|Au_0-f_\delta\|, \tag{3.1}$$

$$\lim_{r\to\infty}\|Au_r-f_\delta\|=\inf_{u\in H}\|Au-f_\delta\|, \tag{3.2}$$

а для приближения (1.3), кроме того,

$$\lim_{r\to 0}\|A^*(Au_r-f_\delta)\|=\|A^*(Au_0-f_\delta)\|, \tag{3.3}$$

$$\lim_{r\to\infty}\|A^*(Au_r-f_\delta)\|=0. \tag{3.4}$$

Если выполнено условие

$$|1-\lambda g_{r_2}(\lambda)|\leqslant|1-\lambda g_{r_1}(\lambda)|\quad(0\leqslant\lambda\leqslant a)\quad\text{при } 0<r_1\leqslant r_2, \tag{3.5}$$

то $\|Au_r—f_\delta\|$, а для приближения (1.3) также $\|A^*(Au_r—f_\delta)\|$ являются невозрастающими функциями r. Если выполнено условие

$$g_{r_n}(\lambda)\to g_r(\lambda)\quad\text{при } r_n\to r>0\quad\forall\lambda\in[0, a], \tag{3.6}$$

то $\|Au_r—f_\delta\|$, а для приближения (1.3) также $\|A^*(Au_r—f_\delta)\|$ непрерывны по r.

Доказательство для приближений (1.2) и (1.3) проводится по единой схеме, и мы ограничимся случаем приближения (1.3), о котором сформулировано больше утверждений. В силу (1.3) и (1.4) $\|u_r—u_0\|\leqslant\gamma\|A^*(f_\delta—Au_0)\|r$ и $u_r\to u_0$ при $r\to 0$. Отсюда следуют (3.1) и (3.3). Соотношения (3.2) и (3.4) следуют из утверждения 1 теоремы 5.2 гл. II; заметим, что $\|f—Qf\|= \inf\limits_{u\in H}\|f—Au\|$ $\forall f\in F$. Далее, в силу леммы 3.1 гл. II

$$Au_r—f_\delta=(I—AA^*g_r(AA^*))(Au_0—f_\delta), \tag{3.7}$$

$$A^*(Au_r—f_\delta)=(I—A^*Ag_r(A^*A))A^*(Au_0—f_\delta). \tag{3.8}$$

Значит,

$$\|Au_r-f_\delta\|^2=\int_0^a|1-\lambda g_r(\lambda)|^2\,d\langle Q(\lambda)z, z\rangle,\qquad z=Au_0-f_\delta,$$

$$\|A^*(Au_r-f_\delta)\|^2=\int_0^a|1-\lambda g_r(\lambda)|^2 d\langle P(\lambda)v, v\rangle,\qquad v=A^*(Au_0-f_\delta),$$

где $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ — спектральные семейства проекторов для операторов A^*A и AA^* соответственно. Отсюда и из (3.5) вытекают утверждения леммы о монотонности $\|Au_r-f_\delta\|$ и $\|A^*(Au_r-f_\delta)\|$ по r. Поскольку функции $|1-\lambda g_r(\lambda)|^2$ на $[0, a]$ ограничены не зависящей от r постоянной γ_0^2 (см. условие (1.6)), а по условию (3.6) при $r_n \to r > 0$ имеет место поточечная сходимость $|1-\lambda g_{r_n}(\lambda)|^2 \to |1-\lambda g_r(\lambda)|^2$, $\lambda \in [0, a]$, то по теореме Лебега получаем также $\|Au_{r_n}-f_\delta\| \to \|Au_r-f_\delta\|$, $\|A^*(Au_{r_n}-f_\delta)\| \to \|A^*(Au_r-f_\delta)\|$, т. е. $\|Au_r-f_\delta\|$ и $\|A^*(Au_r-f_\delta)\|$ непрерывны по r. Лемма 3.1 доказана.

В случае линейного неограниченного замкнутого плотно определенного оператора $A:\mathscr{D}(A)\subset H \to F$ соотношения (3.1) и (3.3) несколько изменятся. Допустим, что выполнены условия (1.4) и (1.5) с $p_0 \geqslant 1$. Тогда для приближения (1.3) при $r>0$ имеем $u_r \in \mathscr{D}(A)$, $Au_r-f_\delta \in \mathscr{D}(A^*)$,

$$\lim_{r\to 0} \|Au_r - f_\delta\| = \begin{cases} \|Au_0 - f_\delta\|, & \text{если } u_0 \in \mathscr{D}(A), \\ \infty & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\lim_{r\to 0} \|A^*(Au_r - f_\delta)\| = \begin{cases} \|A^*(Au_0 - f_\delta)\|, & \text{если } u_0 \in \mathscr{D}(A),\ Au_0-f_\delta \in \mathscr{D}(A^*), \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.10}$$

Для приближения (1.2) в случае неограниченного оператора $A=A^* \geqslant 0$ соотношение (3.1) заменится на (3.9). Остальные утверждения леммы 3.1. сохраняют свою форму.

3.2. **Правила выбора параметра регуляризации.** Допустим, что $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f| \leqslant \delta$. Тогда по лемме 3.1 для приближений (1.2) и (1.3) имеем

$$\lim_{r\to\infty} \|Au_r - f_\delta\| = \inf_{u\in H} \|Au - f_\delta\| \leqslant \|f_\delta - f\| \leqslant \delta.$$

Эта оценка, вообще говоря, неулучшаема: если $f_\delta - f \in \mathscr{N}(A^*)$, $\|f_\delta - f\| = \delta$, то $\langle Au-f,\ f-f_\delta\rangle = 0$ и

$$\inf_{u\in H} \|Au - f_\delta\| = \inf_{u\in H} (\|Au-f\|^2 + \|f_\delta - f\|^2)^{1/2} = \|f_\delta - f\| = \delta.$$

Но если $\mathscr{N}(A^*)=0$, то $\overline{\mathscr{R}(A)} = F$ и $\lim\limits_{r\to\infty} \|Au_r - f_\delta\| = 0$.

Укажем теперь количественную характеристику невязки тех приближений u_r, которые мы будем считать приемлемыми.

Правило П. Зададим числа $b_1 > 1$ и $b_2 \geqslant b_1$. Если $\|Au_0 - f_\delta\| \leqslant b_2\delta$, то положим $r=0$ (т. е. за приближенное решение уравнения (1.1) примем начальное приближение u_0). В противном случае выберем такое $r>0$, для которого

$$b_1\delta \leqslant \|Au_r - f_\delta\| \leqslant b_2\delta. \tag{3.11}$$

Правило П′. Зададим числа $b>1$ и $\Theta \in (0, 1)$. Если $\|Au_0 - f_\delta\| \leqslant b\delta$, то положим $r=0$. В противном случае выберем любое такое $r>0$, что

$$\|Au_r - f_\delta\| \leqslant b\delta, \tag{3.12}$$

$$\|Au_{r'} - f_\delta\| \geqslant b\delta \text{ для некоторого } r' \in [\Theta r, r]. \tag{3.13}$$

В действительности здесь указаны лишь общие принципы выбора r, а не алгоритмы их осуществления. Алгоритмическая реализация правила П′ особенно удобна в случае итерационных методов: если итерации остановить на первом $r=n$, для которого выполнено (3.12), то (3.13) автоматически выполняется для $r'=n-1$. Правило П′ пригодно и при вычислениях по операторному варианту метода итераций, предоставляющему u_n только для $n=m^k$, $k=1, 2, \dots$. В таком случае следует положить $\Theta=1/m$. Итеративную реализацию правила П′ можно организовать и для неитерационных методов, проведя вычисления u_r для $r=r_n$ с $r_n=r_{n-1}/\Theta$, $n=1, 2, \dots$, до того номера n, для которого впервые удовлетворяется (3.12). Здесь существенно монотонное убывание невязки $\|Au_r-f_\delta\|$ с ростом r, т. е. условие (3.5).

Правило П предназначено для методов, в которых невязка $\|Au_r-f_\delta\|$ непрерывно зависит от r. Если $\mathcal{N}(A^*)=0$, то выбор r из (3.11) осуществим и при $b_1=b_2=1$. Здесь мы имеем дело с критическим уровнем невязки $\|Au_r-f_\delta\|=\delta$. Как будет показано в разд. 4, выбор r из условия $\|Au_r-f_\delta\|=\delta$ для приближения (1.2) не оправдывается, а для приближения (1.3) приводит к хорошим результатам.

Для приближеиия (1.3) можно ввести аналоги правил П и П′ с заменой невязки $\|Au_r-f_\delta\|$ на «вторую» невязку $\|A^*(Au_r-f_\delta)\|$. Поскольку $\|A^*(Au_r-f_\delta)\|\to0$ при $r\to\infty$ (см. (3.4)), то условия $b_1>1$ и $b>1$ можно заменить на $b_1>0$ и $b>0$.

3.3. **Вспомогательные результаты.** Лемма 3.2. Пусть $A=A^*\geqslant0$, $\|A\|\leqslant a$ и выполнены условия (1.4) и (1.6). Если для некоторых $r_n\leqslant\bar{r}=\mathrm{const}$ и $v_0\in\mathcal{N}(A)^\perp$ при $n\to\infty$ имеем $w_n\equiv A(I-Ag_{r_n}(A))v_0\to0$, то $v_n\equiv(I-Ag_{r_n}(A))v_0\to0$.

Доказательство. В силу (1.6) последовательность v_n ограничена: $\|v_n\|\leqslant\gamma_0\|v_0\|$, $n\in N=\{1, 2, \dots\}$. Поэтому из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность; пусть $v_n\dashrightarrow v$ $(n\in N'\subseteq N)$. Тогда $Av_n\dashrightarrow Av$ $(n\in N')$. Но по условию $w_n=Av_n\to0$, значит, $Av=0$, $v\in\mathcal{N}(A)$. Теперь

$$\|v_n\|^2=\langle v_n, (I-Ag_{r_n}(A))v_0\rangle=\langle v_n, v_0\rangle-\langle w_n, g_{r_n}(A)v_0\rangle\to$$

$$\to\langle v, v_0\rangle=0\quad(n\in N'),$$

так как $w_n\to0$, $\|g_{r_n}(A)\|\leqslant\gamma r_n\leqslant\gamma\bar{r}$, $v\in\mathcal{N}(A)$, $v_0\in\mathcal{N}(A)^\perp$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность ограниченной последовательности v_n стремится к нулю по норме. Отсюда следует, что и вся последовательность v_n стремится при $n\to\infty$ по норме к нулю. Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. Пусть $A\in\mathcal{L}(H, F)$, $\|A\|^2\leqslant a$ и выполнены условия (1.4) и (1.6). Если для некоторых $r_n\leqslant\bar{r}=\mathrm{const}$ и $v_0\in\mathcal{N}(A)^\perp$ при $n\to\infty$ имеем $A(I-A^*Ag_{r_n}(A^*A))v_0\to0$, **то** $(I-A^*Ag_{r_n}(A^*A))v_0\to0$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы.

Лемма 3.4. Пусть выполнены условия леммы 3.3. Если для $r_n \leqslant \bar{r} = \mathrm{const}$ и $v_0 \in \mathcal{N}(A)^\perp$ при $n \to \infty$ имеем $A^*A(I - A^*A \cdot g_{r_n}(A^*A))v_0 \to 0$, то $(I - A^*Ag_{r_n}(A^*A))v_0 \to 0$.

3.4. Случай самосопряженной задачи. Начальное приближение $u_0 \in H$ считаем не зависящим от δ. Ближайшее к u_0 решение уравнения (1.1) обозначаем, как обычно, через u_*.

Теорема 3.1. Пусть $H = F$, $A = A^* \geqslant 0$, $\|A\| \leqslant a$, $f \in \mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ и выполнены условия (1.4) и (1.5) с $p_0 > 1$, $\gamma_0 = 1$. Пусть параметр $r = r(\delta)$ в приближении (1.2) выбран по правилу П или П′. Тогда

$$\delta r(\delta) \to 0, \quad u_{r(\delta)} \to u_* \text{ при } \delta \to 0. \tag{3.14}$$

Если начальная погрешность представима в виде

$$u_0 - u_* = A^p v, \quad p > 0, \quad \|v\| \leqslant \rho, \tag{3.15}$$

то справедливы оценки

$$r(\delta) \leqslant d_p \rho^{1/(p+1)} \delta^{-1/(p+1)}, \tag{3.16}$$

$$\|u_{r(\delta)} - u_*\| \leqslant c_p \rho^{1/(p+1)} \delta^{p/(p+1)}, \quad 0 < p \leqslant p_0 - 1, \tag{3.17}$$

где в случае правила П

$$d_p = (\gamma_{p+1}/(b_1 - 1))^{1/(p+1)}, \qquad c_p = (b_2 + 1)^{p/(p+1)} + \gamma d_p, \tag{3.18}$$

а в случае правила П′

$$d_p = \Theta^{-1}(\gamma_{p+1}/(b - 1))^{1/(p+1)}, \qquad c_p = (b + 1)^{p/(p+1)} + \gamma d_p. \tag{3.19}$$

Такие же утверждения верны в случае необязательно неотрицательного $A = A^*$, $\sigma(A) \subseteq [-a_0, a]$, если вместо условий (1.4) и (1.5) ввести их аналоги на $[-a_0, a]$, а вместо (3.15) потребовать $u_0 - u_* = |A|^p v$, $p > 0$, $\|v\| \leqslant \rho$.

Доказательство. Имеем $u_0 - u_* \in \mathcal{N}(A)^\perp$,

$$u_r - u_* = (I - Ag_r(A))(u_0 - u_*) + g_r(A)(f_0 - f), \tag{3.20}$$

$$Au_r - f_\delta = A(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*) - (I - Ag_r(A))(f_\delta - f). \tag{3.21}$$

В силу лемм 5.1 и 5.2 гл. II

$$\|(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\| \to 0 \text{ при } r \to \infty, \tag{3.22}$$

$$\sigma_r \equiv r\|A(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\| \to 0 \text{ при } r \to \infty \tag{3.23}$$

((3.23) справедливо лишь при условии $p_0 > 1$). Кроме того, из (1.4) и (1.5) следует, что

$$\|g_r(A)(f_\delta - f)\| \leqslant \gamma r \delta, \tag{3.24}$$

$$\|I - Ag_r(A)\| \leqslant \gamma_0 = 1. \tag{3.25}$$

Если правило П или П′ при сколь угодно малом $\delta > 0$ выдает $r = 0$, то $\|Au_0 - f_\delta\| \leqslant b_2\delta$, соответственно $\|Au_0 - f_\delta\| \leqslant b\delta$, и в пределе при $\delta \to 0$ получаем $Au_0 = f$, т. е. u_0 — решение уравнения (1.1). В таком случае утверждения теоремы тривиальны. Поэтому будем считать, что при достаточно малых $\delta>0$ определяемые правилами П и П′ параметры $r=r(\delta)$ положительны.

Рассмотрим случай правила П. Для определяемого им $r=r(\delta)$ на основании (3.11), (3.21), (3.25) имеем

$$\|A(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)\|\leqslant(b_2+1)\delta, \tag{3.26}$$

$$\|A(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)\|\geqslant(b_1-1)\delta. \tag{3.27}$$

Из (3.23) и (3.27) заключаем, что $(b_1-1)\delta\leqslant\sigma_{r(\delta)}/r(\delta)$, или $\delta r(\delta)\leqslant\sigma_{r(\delta)}/(b_1-1)$. Отсюда на основании (3.23) заключаем, что $\delta r(\delta)\to0$ при $\delta\to0$. Если при этом $r(\delta)\to\infty$ (это основной случай), то в силу (3.20), (3.22) и (3.24) $u_{r(\delta)}\to u_*$. Если же для некоторых $\delta_n\to0$ последовательность $r(\delta_n)$ окажется ограниченной, то все равно $u_{r(\delta_n)}\to u_*$ — это следует из неравенств (3.24), (3.26) и леммы 3.2. Итак, соотношения (3.14) установлены.

Докажем оценки (3.16) и (3.17) в случае правила П. Пусть начальная погрешность представима в виде (3.15). Ввиду (1.5)

$$\|A(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)\|=\|A^{p+1}(I-Ag_r(A))v\|\leqslant\gamma_{p+1}r^{-(p+1)}\rho, \tag{3.28}$$

что совместно с (3.27) дает искомую оценку {(3.16), (3.18)} на $r(\delta)$ сверху. Подобной оценки снизу нельзя установить в принципе. Казалось бы, это не позволит оценить первый член в формуле погрешности (3.20) (ср. с доказательством теоремы 1.1). Но его удается оценить через невязку приближения u_r, которая мала по условию выбора r. При помощи неравенства моментов оценим

$$\begin{aligned}\|(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)\|&=\|A^p(I-Ag_r(A))v\|\leqslant\\ &\leqslant\|A^{p+1}(I-Ag_r(A))v\|^{p/(p+1)}\|(I-Ag_r(A))v\|^{1/(p+1)}\leqslant\\ &\leqslant\|A(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)\|^{p/(p+1)}\rho^{1/(p+1)}.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Совместно с (3.26) это дает

$$\|(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)\|\leqslant[(b_2+1)\delta]^{p/(p+1)}\rho^{1/(p+1)}.$$

Теперь оценку {(3.17), (3.18)} получаем из (3.20), (3.24) и (3.16). Здесь мы допустили, что $r(\delta)>0$. Если $\|Au_0-f_\delta\|\leqslant b_2\delta$, то в соответствии с правилом П полагаем $r=0$. Оценка {(3.17, (3.18)} верна и в этом случае, ибо тогда

$$\begin{aligned}\|u_0-u_*\|&=\|A^pv\|\leqslant\|A^{p+1}v\|^{p/(p+1)}\rho^{1/(p+1)}=\\ &=\|A(u_0-u_*)\|^{p/(p+1)}\rho^{1/(p+1)}\leqslant[(b_2+1)\delta]^{p/(p+1)}\rho^{1/(p+1)}.\end{aligned}$$

В случае правила П′ рассуждения аналогичны. Вместо (3.26) и (3.27) возьмем за основу соотношения $r\leqslant r'/\theta$,

$$\|A(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)\|\leqslant(b+1)\delta,$$

$$\|A(I-Ag_{r'}(A))(u_0-u_*)\|\geqslant(b-1)\delta,$$

вытекающие для $r=r(\delta)$ из (3.12), (3.13), (3.21) и (3.25). Теорема 3.1 доказана.

Замечания. 1. Теорема 3.1 сохраняет силу и в случае $\gamma_0>1$, если в правилах П и П′ потребовать $b_1>\gamma_0$ и соответственно $b>\gamma_0$; несколько видоизменятся постоянные c_p и d_p.

2. В случае метода (1.2) квалификации $p_0=1$ теорема 3.1 теряет силу. Вместо (3.23) имеем лишь $\sigma_r\leqslant\text{const}$ при $r\to\infty$, и это позволяет при условии $\mathcal{N}(A)=0$ вместо (3.14) доказать лишь, что

$$\delta r(\delta)\leqslant\text{const},\quad u_{r(\delta)}\rightharpoonup u_* \text{ при } \delta\to 0. \tag{3.30}$$

3. Теорема 3.1 сохраняет силу и в случае неограниченного $A=A^*\geqslant 0$, если в (1.4) и (1.5) $a=\infty$.

4. Для каждой индивидуальной задачи (1.1) с начальной погрешностью (3.15) оценки (3.16) и (3.17) допускают уточнение:

$$\delta^{1/(p+1)}r(\delta)\to 0,\quad \|u_{r(\delta)}-u_*\|=o(\delta^{p/(p+1)}),\quad 0<p<p_0-1.$$

Для доказательства в (3.28) и (3.29) следует воспользоваться соотношениями (см. леммы 5.1 и 5.2 гл. II)

$$r^{p+1}\|A^{p+1}(I-Ag_r(A))v\|\to 0,\quad \|(I-Ag_r(A))v\|\to 0 \text{ при } r\to\infty.$$

3.5. **Случай несамосопряженной задачи.** Теорема 3.2. Пусть $A\in\mathcal{L}(H,F)$, $\|A\|^2\leqslant a$, $f\in\mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$ и выполнены условия (1.4) и (1.5) с $p_0>1/2$, $\gamma_0=1$. Пусть параметр $r=r(\delta)$ в приближении (1.3) выбран по правилу П или П′. Тогда

$$\delta^2 r(\delta)\to 0,\quad u_{r(\delta)}\to u_* \text{ при } \delta\to 0. \tag{3.31}$$

Если начальная погрешность представима в виде

$$u_0-u_*=|A|^p v,\ p>0,\ \|v\|\leqslant\rho\ \ (|A|=(A^*A)^{1/2}), \tag{3.32}$$

то

$$r(\delta)\leqslant d_p\rho^{2/(p+1)}\delta^{-2/(p+1)}, \tag{3.33}$$

$$\|u_{r(\delta)}-u_*\|\leqslant c_l\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)},\quad 0<p\leqslant 2p_0-1, \tag{3.34}$$

где в случае правила П

$$d_p=(\gamma_{(p+1)/2}/(b_1-1))^{2/(p+1)},\qquad c_p=(b_2+1)^{p/(p+1)}+\gamma_* d_p^{1/2}, \tag{3.35}$$

а в случае правила П′

$$d_p=\Theta^{-1}(\gamma_{(p+1)/2}/(b-1))^{2/(p+1)},\qquad c_p=(b+1)^{p/(p+1)}+\gamma_* d_p^{1/2}. \tag{3.36}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1. Имеем

$$u_r-u_*=(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u_*)+g_r(A^*A)A^*(f_\delta-f), \tag{3.37}$$

$$Au_r-f_\delta=A(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u_*)-(I-AA^*g_r(AA^*))\cdot$$
$$\cdot(f_\delta-f). \tag{3.38}$$

В силу лемм 5.3 и 5.4 гл. II

$$\|(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u_*)\|\to 0 \text{ при } r\to\infty, \tag{3.39}$$

$$\sigma_r\equiv r^{1/2}\|A(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u_*)\|\to 0 \text{ при } r\to\infty. \tag{3.40}$$

Из условий (1.4) и (1.5) следует, что

$$\|g_r(A^*A)A^*(f_\delta-f)\|\leqslant\gamma_* r^{1/2}\delta, \tag{3.41}$$

$$\|I-A^*Ag_r(A^*A)\|\leqslant\gamma_0=1.$$

Дальнейшие выкладки вполне аналогичны соответствующим рассуждениям в доказательстве теоремы 3.1. Различие в утверждениях двух теорем вызвано различиями в соотношениях (3.23) и (3.40), а также тем, что в случае начальной погрешности (3.32) имеем (ср. с (3.28))

$$\|A(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u_*)\|=\|(A^*A)^{(p+1)/2}(I-A^*Ag_r(A^*A))v\|\leqslant$$
$$\leqslant\gamma_{(p+1)/2}r^{-(p+1)/2}\rho, \qquad 0<p\leqslant 2p_0-1.$$

Доказательство теоремы 3.2 завершено.

Замечания. 1. Теорема 3.2 сохраняет силу и при $\gamma_0>1$, если в правилах П и П′ потребовать $b_1>\gamma_0$, $b>\gamma_0$; видоизменятся лишь постоянные c_p, d_p.

2. В случае метода (1.3) квалификации $p_0=1/2$ теорема 3.1 теряет силу. Но все же $\delta^2 r(\delta)\leqslant\text{const}$, $u_{r(\delta)}\longrightarrow u_*$ при $\delta\to 0$.

3. Теорема 3.2 сохраняет силу и в случае линейного неограниченного плотно определенного замкнутого оператора $A:\mathscr{D}(A)\subset\subset H\to F$, если в условиях (1.4) и (1.5) $a=\infty$.

4. Для каждой индивидуальной задачи (1.1) с начальной погрешностью (3.32) $\delta^{2/(p+1)}r(\delta)\to 0$, $\|u_{r(\delta)}-u_*\|=o(\delta^{p/(p+1)}$, $0<p<<2p_0-1$.

3.6. **Выбор параметра регуляризации по второй невязке** позволяет установить сходимость приближения (1.3) в предположении $Qf\in\mathscr{R}(A)$. Более точно — наложим на выбор $r=r(\delta)$ условие

$$b_1\delta\leqslant\|A^*(Au_r-f_\delta)\|\leqslant b_2\delta, \qquad b_2\geqslant b_1>0. \tag{3.42}$$

Теорема 3.3. Пусть $A\in\mathscr{L}(H,F)$, $\|A\|^2\leqslant a$, $Qf\in\mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$ и выполнены условия (1.4) и (1.5) с $p_0>1$. Пусть параметр $r=r(\delta)$ подобран так, что выполнены неравенства (3.42). Тогда

$$\delta r(\delta)\to 0, \quad u_{r(\delta)}\to u_* \text{ при } \delta\to 0, \tag{3.43}$$

где u_* — ближайшее к u_0 квазирешение уравнения (1.1). В случае начальной погрешности (3.32) справедливы оценки

$$r(\delta)\leqslant d_p\rho^{2/(p+2)}\delta^{-2/(p+2)}, \tag{3.44}$$

$$\|u_{r(\delta)}-u_*\|\leqslant c_p\rho^{2/(p+2)}\delta^{p/(p+2)}, \quad 0<p\leqslant 2(p_0-1), \tag{3.45}$$

где d_p и c_p — некоторые постоянные.

Доказательство. Формула (3.37) остается справедливой и при условии $Qf\in\mathscr{R}(A)$ вместо $f\in\mathscr{R}(A)$, ибо $A^*Au_*=A^*f$. Из нее следует, что

$$A^*(Au_r-f_\delta)=A^*A(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u_*)-A^*(I-AA^*\times$$
$$\times g_r(AA^*))(f_\delta-f). \tag{3.46}$$

В силу леммы 5.4 гл. II

$$\sigma_r \equiv r\|A^*A(I - A^*Ag_r(A^*A))(u_0 - u_*)\| \to 0 \text{ при } r \to \infty \tag{3.47}$$

(здесь существенно условие $p_0 > 1$).

Для $r = r(\delta)$, определяемого условиями (3.42), в силу (3.46)

$$\|A^*A(I - A^*Ag_r(A^*A))(u_0 - u_*)\| \leqslant (b_2 + \gamma_{1/2} r^{-1/2})\delta, \tag{3.48}$$

$$\|A^*A(I - A^*Ag_r(A^*A))(u_0 - u_*)\| \geqslant (b_1 - \gamma_{1/2} r^{-1/2})\delta. \tag{3.49}$$

Из (3.47) и (3.49) заключаем, что $\delta r(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Затем из (3.37), (3.39) и (3.41) заключаем, что $u_{r(\delta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$; в случае, когда $r(\delta)$ остается при $\delta \to 0$ ограниченным, привлекаем лемму 3.4 и неравенство (3.48).

В случае начальной погрешности (3.32)

$$\|A^*A(I - A^*Ag_r(A^*A))(u_0 - u_*)\| \leqslant \gamma_{(p+2)/2} r^{-(p+2)/2} \rho,$$

что совместно с (3.49) дает оценку (3.44). Оценив в (3.37) второй член на основе (3.41) и (3.44), а первый посредством неравенства моментов через (3.48), приходим к оценке (3.45). Теорема 3.3 доказана.

Мы рассмотрели только аналог правила П для второй невязки. Равным образом теорема 3.3 справедлива для аналога правила П′.

Замечания. 1. В теореме 3.3 условие $\gamma_0 = 1$ не понадобилось.

2. В случае $p_0 = 1$ теорема 3.3 теряет силу; имеет место (3.30).

3. Теорема 3.3 сохраняет силу и для неограниченного плотно определенного замкнутого оператора A, если в (1.4) и (1.5) $a = \infty$.

4. Для каждой индивидуальной задачи (1.1) с начальной погрешностью (3.32) $\delta^{2/(p+2)} r(\delta) \to 0$, $\|u_{r(\delta)} - u_*\| = o(\delta^{p/(p+2)})$, $0 < p < 2(p_0 - 1)$.

3.7. **Обсуждение.** В условиях теорем 3.1 и 3.2 сходимость $u_{r(\delta)} \to u_*$ получена для любого $f \in \mathscr{R}(A)$ (в теореме 3.3 даже для любого f с $Qf \in \mathscr{R}(A)$). Поэтому методы (1.2) и (1.3), дополненные правилами П или П′ выбора параметра r, представляют собой регуляризаторы задачи (1.1). (Эти регуляризаторы нелинейны. Заметим, что $r = r(\delta)$, определяемое в соответствии с П или П′, в действительности еще зависит от f_δ (а не только от δ), что в обозначениях не отражено.) Оценки (3.17) и (3.34) говорят о том, что эти методы оптимальны по порядку на классах $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$. Правда, по сравнению с априорным выбором r эти оценки уступают в широте шкалы по p (ср. (1.11) с (3.17) и (1.20) с (3.34)). Но подчеркнем и следующее важное обстоятельство: выбор r по правилам П или П′ в отличие от априорного выбора r, рассмотренного в разд. 1, 2, не требует информации о принадлежности решения задачи (1.1) какому-нибудь классу $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$. Тем не менее правила П и П′ правильно регулируют выбор r, если решение принадлежит какому-то из этих классов,— в этом суть теорем 3.1 и 3 2.

В теоремах 3.1 и 3.2 мы предполагали, что условие (1.5) выполнено с $\gamma_0=1$. Это не совсем обязательное предположение (см. замечания после теорем 3.1 и 3.2) оправдывается тем, что оно выполнено для всех конкретных методов, обсуждавшихся в гл. II. Для всех этих методов выполнено и условие (3.5), гарантирующее монотонное поведение невязки и облегчающее практическое применение правил П и П′. Условие (3.6), гарантирующее непрерывность невязки по параметру r, выполнено для методов М. М. Лаврентьева, А. Н. Тихонова, их итерированных вариантов, непрерывного аналога итерационных методов, одного из вариантов метода спектральной срезки (а именно варианта с непрерывными порождающими функциями).

В теоремах 3.1—3.3 мы еще предполагали, что условие (1.5) выполнено соответственно с $p_0>1$, $p_0>1/2$, $p_0>1$. Это принципиальное ограничение, которое не позволяет применять правила П, П′ и их аналоги типа (3.42) для методов низкой квалификации. В частности, правила П и П′ неприменимы для метода М. М. Лаврентьева, ибо квалификация $p_0=1$. Простейший выход из положения — применение итерированного варианта метода (его квалификация $p_0=m$, где m — число итераций). Для метода А. Н. Тихонова правила П и П′ применимы, но неприменимо правило (3.42).

3.8. **Применение к итерированным вариантам методов М. М. Лаврентьева и А. Н. Тихонова.** Следующие две теоремы являются непосредственными следствиями из теорем 3.1 и 3.2 и рассмотрений гл. II.

Теорема 3.4. Пусть $H=F$, $A=A^*\geqslant 0$, $f\in\mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$. Подберем параметр $\alpha=\alpha(\delta)$ в итерированном варианте метода М. М. Лаврентьева

$$u_{0,\alpha}=u_0,\ \alpha u_{n,\alpha}+Au_{n,\alpha}=\alpha u_{n-1,\alpha}+f_\delta,\quad n=1,\ldots,m\,(m\geqslant 2)\ (3.50$$

таким образом, что $b_1\delta\leqslant\|Au_{m,\alpha}-f_\delta\|\leqslant b_2\delta$, $1<b_1\leqslant b_2$. Тогда $\delta/\alpha(\delta)\to 0$, $u_{m,\alpha(\delta)}\to u_*$ при $\delta\to 0$. Если $u_*\in\mathscr{M}_{p\rho u_0}$, то

$$\alpha(\delta)\geqslant d_p\rho^{-1/(p+1)}\delta^{1/(p+1)},$$

$$\|u_{m,\alpha(\delta)}-u_*\|\leqslant c_p\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)},\quad 0<p\leqslant m-1,$$

где

$$d_p=\frac{p+1}{m}\left(1-\frac{p+1}{m}\right)^{(m-1-p)/(p+1)}(b_1-1)^{-1/(p+1)},$$

$$c_p=(b_2+1)^{p/(p+1)}+(p+1)\left(1-\frac{p+1}{m}\right)^{(m-1-p)/(p+1)}(b_1-1)^{-1/(p+1)}.$$

Еще раз подчеркнем необходимость условия $m\geqslant 2$ в этой теореме. Из рассмотрений п. 3.10 следует, что при $m=1$ получаем сходящийся процесс, если $\alpha=\alpha(\delta)$ в приближении $u_\alpha=u_{\alpha,1}=(\alpha I+A)^{-1}(\alpha u_0+f_\delta)$ выбирать из условия $b_1\delta^s\leqslant\|Au_\alpha-f_\delta\|\leqslant b_2\delta^s$, $0<b_1\leqslant b_2$, $0<s<1$. Но при этом теряется оптимальный порядок метода на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$.

Теорема 3.5. Пусть $A \in \mathscr{L}(H, F)$, $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. Подберем параметр $\alpha = \alpha(\delta)$ в итерированном варианте метода А. Н. Тихонова

$$u_{0,\alpha} = u_0,$$
$$\alpha u_{n,\alpha} + A^* A u_{n,\alpha} = \alpha u_{n-1,\alpha} + A^* f_\delta, \quad n = 1, \ldots, m \ (m \geqslant 1) \tag{3.51}$$

таким образом, что

$$b_1 \delta \leqslant \|A u_{m,\alpha} - f_\delta\| \leqslant b_2 \delta, \qquad 1 < b_1 \leqslant b_2. \tag{3.52}$$

Тогда $\delta^2/\alpha(\delta) \to 0$, $u_{m,\alpha(\delta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$. Если $u_* \in \mathscr{M}_{p\rho u_0}$, то

$$\alpha(\delta) \geqslant d_p \rho^{-2/(p+1)} \delta^{2/(p+1)},$$
$$\|u_{m,\alpha(\delta)} - u_*\| \leqslant c_p \rho^{1/(p+1)} \delta^{p/(p+1)}, \quad 0 < p \leqslant 2m - 1, \tag{3.53}$$

где

$$d_p = \frac{p+1}{2m}\left(1 - \frac{p+1}{2m}\right)^{(2m-1-p)/(p+1)} (b_1 - 1)^{-2/(p+1)},$$

$$c_p = (b_2 + 1)^{p/(p+1)} + \left[\frac{p+1}{2}\left(1 - \frac{p+1}{2m}\right)^{(2m-1-p)/(p+1)}\right]^{1/2} (b_1 - 1)^{-1/(p+1)}.$$

При $m=1$, $u_0=0$ эта теорема затрагивает метод А. Н. Тихонова $u_\alpha = (\alpha I + A^* A)^{-1} A^* f_\delta$. Забегая вперед и ссылаясь на результаты п. 4.4 (см., в частности, (4.21)), отметим, что в случае метода А. Н. Тихонова и его итерированного варианта (3.51) в (3.52) можно брать и $b_1 = 1$, $b_2 \geqslant b_1$. Правда, оценки для $\alpha(\delta)$ в таком случае не будет, но оценка (3.53) при $0 < p \leqslant 1$ справедлива с $c_p = (b_2 + 1)^{p/(p+1)}$ независимо от числа итераций $m \geqslant 1$.

Теоремы 3.4 и 3.5 сохраняют силу, если не фиксировать $m \geqslant 1$, а допускать что $m = m(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$. Это соответствует неявной итерационной схеме с варьированием параметра α; см. обсуждение п. 3.2 гл. II.

3.9. Применение к итерационным методам. Применим теоремы 3.1—3.3 к итерационным методам и дополним результаты асимптотическими оценками (ср. с п. 1.4). Пусть $g : [0, a] \to R$ — ограниченная измеримая по Борелю функция, удовлетворяющая условиям леммы 4.1 гл. II. Рассмотрим итерационные схемы (1.26) и (1.27).

Теорема 3.6. Пусть $H = F$, $A = A^* \geqslant 0$, $\|A\| \leqslant a$, $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. Остановим итерации (1.26) на первом $n = n(\delta)$, для которого $\|A u_n - f_\delta\| \leqslant b\delta$, $b = \mathrm{const} > 1$. Тогда $\delta n(\delta) \to 0$, $u_{n(\delta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$. Если $u_* \in \mathscr{M}_{p\rho u_0}$, $0 < p < \infty$, то

$$\varlimsup_{\delta \to 0} \frac{n(\delta)}{\rho^{1/(p+1)} \delta^{-1/(p+1)}} \leqslant \hat{d}_p, \qquad \varlimsup_{\delta \to 0} \frac{\|u_{n\,\delta)} - u_*\|}{\rho^{1/(p+1)} \delta^{p/(p+1)}} \leqslant \hat{c}_p,$$

где

$$\hat{d}_p = (p+1)(b-1)^{-1/(p+1)} [g(0) e]^{-1},$$
$$\hat{c}_p = (b+1)^{p/(p+1)} + (p+1)(b-1)^{-1/(p+1)} e^{-1}.$$

Теорема 3.7. Пусть $A \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A\|^2 \leqslant a$, $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. Остановим итерации (1.27) на первом $n = n(\delta)$, для которого $\|Au_n - f_\delta\| \leqslant b\delta$, $b > 1$. Тогда $\delta^2 n(\delta) \to 0$, $u_{n(\delta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$. Если $u_* \in \mathscr{M}_{p\rho u_0}$, $0 < p < \infty$, то

$$\varlimsup_{\delta\to 0} \frac{n(\delta)}{\rho^{2/(p+1)}\delta^{-2/(p+1)}} \leqslant \hat{d}_p, \qquad \varlimsup_{\delta\to 0} \frac{\|u_{n(\delta)} - u_*\|}{\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}} \leqslant \hat{c}_p,$$

где

$$\hat{d}_p = (p+1)(b-1)^{-2/(p+1)}[2g(0)e]^{-1},$$

$$\hat{c}_p = (b+1)^{p/(p+1)} + (p+1)^{1/2}(b-1)^{-1/(p+1)}\theta(2e)^{-1/2}, \quad \theta \approx 0{,}6382.$$

Теорема 3.8. Пусть $A \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A\|^2 \leqslant a$, $Qf \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. Остановим итерации (1.27) на первом $n = n(\delta)$, для которого $\|A^*(Au_n - f_\delta)\| \leqslant b\delta$, $b = \text{const} > 0$. Тогда $\delta n(\delta) \to 0$, $u_{n(\delta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$. Если $u_* \in \mathscr{M}_{p\rho u_0}$, $0 < p < \infty$, то

$$\varlimsup_{\delta\to 0} \frac{n(\delta)}{\rho^{2/(p+2)}\delta^{-2/(p+2)}} \leqslant \frac{p+2}{2g(0)eb^{2/(p+2)}},$$

$$\varlimsup_{\delta\to 0} \frac{\|u_{n(\delta)} - u_*\|}{\rho^{2/(p+2)}\delta^{p/(p+2)}} \leqslant b^{p/(p+2)}.$$

Теорема 3.9. Пусть выполнены условия теоремы 3.8. Остановим итерации (1.27) на первом $n = n(\delta)$, для которого $\|u_n - u_{n-1}\| \leqslant b\delta$, $b = \text{const} > 0$. Тогда $\delta n(\delta) \to 0$, $u_{n(\delta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$. Если $u_* \in \mathscr{M}_{p\rho u_0}$, $0 < p < \infty$, то $n(\delta) \leqslant d_p \rho^{2/(p+2)}\delta^{-2/(p+2)}$, $d_p = \text{const}$,

$$\|u_{n(\delta)} - u_*\| \leqslant c_p \rho^{2/(p+2)}\delta^{p/(p+2)}, \quad c_p = \text{const}.$$

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы 3.3. Действительно, $u_n - u_{n-1} = -g(A^*A)A^*(Au_{n-1} - f_\delta)$, откуда следует, что

$$\beta\|A^*(Au_{n-1} - f_\delta)\| \leqslant \|u_n - u_{n+1}\| \leqslant \gamma\|A^*(Au_{n-1} - f_\delta)\|,$$

где при наложенных условиях на $g : [0, a] \to R$

$$\beta \equiv \inf_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} g(\lambda) > 0, \quad \gamma \equiv \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} g(\lambda) < \infty.$$

3.10. **Принцип невязки для методов низкой квалификации.** Правильно согласуя уровень невязки с δ, можно получить сходящиеся процессы и для методов низкой (даже нулевой) квалификации. Рассмотрим в качестве примера класс методов (1.2) с $H = F$, $A = A^*$, $\sigma(A) \subseteq [-a_0, a]$. Пусть выполнены условия

$$\sup_{-a_0 \leqslant \lambda \leqslant a} |g_r(\lambda)| \leqslant \gamma r \quad (r > 0), \tag{3.54}$$

$$\sup_{-a_0 \leqslant \lambda \leqslant a} |\lambda|^p |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_r r^{-sp} \quad (r > 0;\ 0 \leqslant p \leqslant p_0), \tag{3.55}$$

где $0 < s < 1$. Это методы нулевой квалификации (квалификация была бы p_0 при $s = 1$). Мы уже встречались с одним представителем таких методов — это метод итераций (3.14) гл. II; условия (3.54) и (3.55) для него выполнены с $s = 1/2$, $p_0 = \infty$.

Пусть $f \in \mathscr{R}(A)$. Допустим, что в (3.55) $p_0 > 1$. Покажем, что $u_{r(\delta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$, если $r = r(\delta)$ выбрать из условия

$$b_1 \delta^s \leqslant \|Au_r - f_\delta\| \leqslant b_2 \delta^s \quad (0 < b_1 \leqslant b_2). \tag{3.56}$$

Действительно, аналогично лемме 5.2 гл. II устанавливается, что

$$\sigma_r \equiv r^s \|A(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\| \to 0 \text{ при } r \to \infty. \tag{3.57}$$

Для определяемого из (3.56) $r = r(\delta)$ на основании (3.21) получаем

$$\|A(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\| \leqslant b_2 \delta^s + \gamma_0 \delta, \tag{3.58}$$

$$\|A(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\| \geqslant b_1 \delta^s - \gamma_0 \delta. \tag{3.59}$$

Из (3.57) и (3.59) $b_1 \delta^s - \gamma_0 \delta \leqslant \sigma_r r^{-s}$, откуда следует, что $\delta r(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Отсюда при помощи (3.20), (3.22), (3.24) и утверждения типа леммы 3.2 получаем, что $u_{r(\delta)} \to u_*$, $\delta \to 0$.

4. Критический уровень невязки

4.1. Постановка вопроса. В этом параграфе мы изучим подкласс методов (1.2) и (1.3), выделяемый условиями (см. п. 3.3 гл. II)

$$g_r(\lambda) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant 1 - \lambda g_r(\lambda) \leqslant \frac{g_r(\lambda)}{\varkappa_r} \qquad (\leqslant \lambda \leqslant a),$$

$$\beta r \leqslant \varkappa_r \equiv \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} g_r(\lambda) \leqslant \gamma r, \qquad \beta = \text{const} > 0,\ \gamma = \text{const},\ r > 0. \tag{4.1}$$

Напомним, что из (4.1) вытекает (1.4) и (1.5) с $p_0 = 1$.

Нашей основной целью будет анализ сходимости приближений u_r при выборе $r = r(\delta)$ из условия $\|Au_r - f_\delta\| = \delta$. Для итерационных методов проанализируем останов итераций на первом $n = n(\delta)$, для которого $\|Au_n - f_\delta\| \leqslant \delta$. В правилах П и П′ (см. п. 3.2) это соответствует случаю $b_1 = b_2 = 1$, $b = 1$. Оказывается, что такой уровень невязки в некотором смысле критичен: для приближения (1.2) он приводит к расходящемуся процессу, а для приближения (1.3) — к сходящемуся, оптимальному по порядку на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$, $0 < p \leqslant 1$.

4.2. **Теорема о расходимости.** В случае оператора $A = A^* \geqslant 0$ условие $\mathscr{N}(A) = 0$ равносильно положительности оператора: $A > 0$. В силу леммы 3.1 для такого оператора $\|Au_r - f_\delta\| \to 0$ при $r \to \infty$.

Теорема 4.1. Пусть $H = F$, $A = A^* > 0$, $\|A\| \leqslant a$, $f \in \mathscr{R}(A)$, причем начальное приближение u_0 таково, что

$$(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*) \neq 0 \text{ при } r > 0. \tag{4.2}$$

Пусть выполнены условия (4.1) и (3.6). Тогда для любого $M \gg 0$ и любого (фиксированного сколь угодно малым) $\delta > 0$ найдется такое $f_\delta = f_{\delta, M}$, что $\|f_\delta - f\| = \delta$, но при определении $r = r(\delta)$ из условия $\|Au_r - f_\delta\| = \delta$ для приближения (1.2) имеем $\|u_{r(\delta)} - u_*\| > M$.

Доказательство проведем при дополнительном условии о полной непрерывности оператора A, что упрощает выкладки. Обозначим через λ_j и φ_j $(j=1, 2, \ldots)$ собственные значения и собственные элементы оператора A: $A\varphi_j=\lambda_j\varphi_j$, $\lambda_j>0$, $\|\varphi_j\|=1$ $(j=1, 2, \ldots)$, $\lambda_j\to 0$ при $j\to\infty$. Элемент f_δ выберем так, что $f_\delta-f=\sigma_j\delta\varphi_j$, где $\sigma_j=1$, если $\operatorname{Re}\langle u_0-u_*, \varphi_j\rangle\leqslant 0$, и $\sigma_j=-1$ в противном случае; номер $j=j(\delta, M)$ выбирается достаточно большим (см. ниже). Имеем

$$u_r-u_*=(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)+g_r(A)(f_\delta-f)=$$

$$=(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)+\sigma_j\delta g_r(\lambda_j)\varphi_j, \qquad (4.3)$$

$$Au_n-f_\delta=A(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)-(I-Ag_r(A))(f_\delta-f)=$$

$$=A(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)-\sigma_j\delta(1-\lambda_jg_r(\lambda_j))\varphi_j. \qquad (4.4)$$

Из (4.3) и (4.4)

$$\|u_r-u_*\|\geqslant\delta g_r(\lambda_j)-\varepsilon_r,\quad \varepsilon_r=\|(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)\|\to 0 \text{ при } r\to\infty,$$

$$\|Au_r-f_\delta\|^2\geqslant\|A(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)\|^2+\delta^2(1-\lambda_jg_r(\lambda_j))^2,$$

так как в силу выбора σ_j

$$\operatorname{Re}\langle A(I-Ag_r(A))(u_0-u_*),\ -\sigma_j\delta(1-\lambda_jg_r(\lambda_j))\varphi_j\rangle=$$

$$=-\sigma_j\delta\lambda_j(1-\lambda_jg_r(\lambda_j))^2\operatorname{Re}\langle u_0-u_*, \varphi_j\rangle\geqslant 0.$$

Выберем $r=r(\delta)$ из условия $\|Au_r-f_\delta\|=\delta$. Тогда

$$\|A(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)\|^2+\delta^2(1-\lambda_jg_r(\lambda_j))^2\leqslant\delta^2.$$

С учетом (4.2) отсюда заключаем, что $r(\delta)\to\infty$ при $j\to\infty$; в силу (4.1) имеем также $g_{r(\delta)}(\lambda_j)\geqslant(\lambda_j+\varkappa_{r(\delta)}^{-1})^{-1}\to\infty$ при $j\to\infty$, поэтому

$$\|u_{r(\delta)}-u_*\|\geqslant\delta g_{r(\delta)}(\lambda_j)-\varepsilon_{r(\delta)}\to\infty \text{ при } j\to\infty.$$

Теорема 4.1 доказана.

В соответствии с теоремой 4.1 в итерированном варианте метода М. М. Лаврентьева (3.50) уровень невязки $\|Au_{m,\alpha}-f_\delta\|=\delta$ приводит к расходящемуся процессу. То же самое можно сказать о непрерывном аналоге итерационных методов $u'(t)+Au(t)=f_\delta$, $u(0)=u_0$ с выбором $t=t(\delta)$ из условия $\|Au(t)-f_\delta\|=\delta$. Нетрудно видоизменить приведенные рассуждения для итерационного метода (1.26) и установить расходимость процесса при останове на первом $n=n(\delta)$, для которого $\|Au_n-f_\delta\|\leqslant\delta$.

Следует заметить, что отрицательный результат в теореме 4.1 получен при весьма специальных возмущениях правой части $f\in\mathscr{R}(A)$. Если возмущения имеют случайный характер или даже детерминированный, но не имеющий отношения к собственным элементам оператора A, то, как показывают численные эксперименты [20], ухудшение приближения u_r при приближении невязки $\|Au_r-f_\delta\|$ к критическому значению δ хотя и имеет место, но выражено нерезко.

4.3. **Вспомогательное неравенство.** Следующий вспомогательный результат небезынтересен и сам по себе.

Лемма 4.1. Пусть $A\in\mathscr{L}(H,F)$, $\|A\|^2\leqslant a$ и выполнено условие (4.1). Тогда для приближения (1.3) и любого $u\in H$

$$\|u_r-u\|^2+\varkappa_r(\|Au_r-f_\delta\|^2-\|Au-f_\delta\|^2)\leqslant$$
$$\leqslant\langle(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u),\ u_0-u\rangle\quad(r>0). \qquad (4.5)$$

Доказательство. В соответствии с (3.7) имеем

$$\|Au_r-f_\delta\|^2=\int_0^a(1-\lambda g_r(\lambda))^2d\langle Q(\lambda)(Au_0-f_\delta),\ Au_0-f_\delta\rangle, \qquad (4.6)$$

где $Q(\lambda)$ — спектральное семейство проекторов оператора AA^*. Для приближения (1.3) и любого $u\in H$ имеем

$$u_r-u=(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u)+g_r(A^*A)A^*(f_\delta-Au). \qquad (4.7)$$

Отсюда

$$\|u_r-u\|^2=\langle(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u),\ (I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u)\rangle+$$
$$+2\operatorname{Re}\langle(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u),\ g_r(A^*A)A^*(f_\delta-Au)\rangle+$$
$$+\langle g_r(A^*A)A^*(f_\delta-Au),\ g_r(A^*A)A^*(f_\delta-Au)\rangle=$$
$$=\langle(I-A^*Ag_r(A^*A))^2(u_0-u),\ u_0-u\rangle+$$
$$+2\operatorname{Re}\langle Ag_r(A^*A)(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u),\ f_\delta-Au\rangle+$$
$$+\langle AA^*g_r(AA^*)g_r(AA^*)(f_\delta-Au),\ f_\delta-Au\rangle$$

(на последнем шаге преобразований мы воспользовались формулами (3.29) гл. II). Далее, раскладывая Au_0-f_δ на слагаемые $A(u_0-u)$ и $Au-f_\delta$, напишем вспомогательное равенство

$$\langle g_r(AA^*)(I-AA^*g_r((AA^*))(Au_0-f_\delta),\ Au_0-f_\delta\rangle=$$
$$=\langle g_r(AA^*)(I-AA^*g_r(AA^*))A(u_0-u),\ A(u_0-u)\rangle+$$
$$+2\operatorname{Re}\langle g_r(AA^*)(I-AA^*g_r(AA^*))A(u_0-u),\ Au-f_\delta\rangle+$$
$$+\langle g_r(AA^*)(I-AA^*g_r(AA^*))(Au-f_\delta),\ Au-f_\delta\rangle=$$
$$=\langle A^*Ag_r(A^*A)(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u),\ u_0-u\rangle-$$
$$-2\operatorname{Re}\langle Ag_r(A^*A)(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u),\ f_\delta-Au\rangle+$$
$$+\langle g_r(AA^*)(I-AA^*g_r(AA^*))(f_\delta-Au),\ f_\delta-Au\rangle.$$

Полученные два равенства сложим почленно:

$$\|u_r-u\|^2+\langle g_r(AA^*)(I-AA^*g_r(AA^*))(Au_0-f_\delta),\ Au_0-f_\delta\rangle=$$
$$=\langle(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u),u_0-u\rangle+\langle g_r(AA^*)(f_\delta-Au),\ f_\delta-Au\rangle.$$

По условию (4.1) $g_r(\lambda)\geqslant\varkappa_r(1-\lambda g_r(\lambda))$, вследствие чего

$$\langle g_r(AA^*)(I-AA^*g_r(AA^*))(Au_0-f_\delta),\ Au_0-f_\delta\rangle=$$
$$=\int_0^a g_r(\lambda)(1-\lambda g_r(\lambda))\,d\langle Q(\lambda)(Au_0-f_\delta\rangle,\ Au_0-f_\delta\geqslant$$
$$\geqslant\varkappa_r\int_0^a(1-\lambda g_r(\lambda))^2d\langle Q(\lambda)(Au_0-f_\delta,\ Au_0-f_\delta\rangle=\varkappa_r\|Au_r-f_\delta\|^2$$

(см. (4.6)). Учитывая также, что $\langle g_r(AA^*)(f_\delta - Au), f_\delta - Au\rangle \leqslant \leqslant \varkappa_r \|f_\delta - Au\|^2$, приходим к неравенству (4.5). Лемма 4.1 доказана.

4.4. Теорема сходимости. Обсудим сперва возможность выбора r в приближении (1.3) из условия

$$\|Au_r - f_\delta\| = \delta. \tag{4.8}$$

Допустим, что выполнено условие (3.6), $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|Au_0 - f_\delta\| > \delta$. Если $\mathscr{N}(A^*) = 0$, то ввиду непрерывности невязки по r и предельного соотношения $\lim\limits_{r \to \infty} \|Au_r - f_\delta\| = 0$ условие (4.8) определяет конечное $r = r(\delta) > 0$. Пусть теперь $\mathscr{N}(A^*)$ нетривиально. В силу теоремы 5.2 гл. II $Au_r - f_\delta \to Qf_\delta - f_\delta$ при $r \to \infty$. Условие (4.8) может не определить конечного r, если $\|Qf_\delta - f_\delta\| \geqslant \delta$. Но Qf_δ — ортогональная проекция элемента f_δ на подпространство $\overline{\mathscr{R}(A)} \subseteq F$, а $f \in \mathscr{R}(A)$, поэтому верно и обратное неравенство $\|Qf_\delta - f_\delta\| \leqslant \leqslant \|f - f_\delta\| \leqslant \delta$. Итак, условие (4.8) только в одном случае может не определить конечного r — в случае $Qf_\delta = f$, $\|f_\delta - f\| = \delta$. Поскольку $A^*Q = A^*$, то приближение (1.3) в таком случае запишется в виде $u_r = (I - A^*Ag_r(A^*A))u_0 + g_r(A^*A)A^*f$ и при $r \to \infty$ стремится к u_* (см. теорему 5.2 гл. II). В таком исключительном случае можно условиться считать, что правило (4.8) выдает $r(\delta) = \infty$, причем $u_\infty = u_*$. Для практических целей целесообразно наложить на r априорное ограничение $r(\delta) \leqslant d/\delta^2$, $d = \mathrm{const} > 0$, т. е. выбирать $r = r(\delta)$ из условия (4.8), если равенство (4.8) будет достигнуто при $r \leqslant d/\delta^2$, и положить $r(\delta) = d/\delta^2$ в противном случае, не вычисляя u_r для бо́льших r.

Теорема 4.2. Пусть $A \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A\|^2 \leqslant a$, $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ и выполнены условия (4.1) и (3.6). Выберем параметр $r = r(\delta)$ в приближении (1.3) из условия (4.8). Тогда $u_{r(\delta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$, причем в случае начальной погрешности

$$u_0 - u_* = |A|^p v, \quad p > 0, \quad \|v\| \leqslant \rho \tag{4.9}$$

справедлива оценка погрешности

$$\|u_{r(\delta)} - u_*\| \leqslant 2^{p/(p+1)} \rho^{1/(p+1)} \delta^{p/(p+1)}, \quad 0 < p \leqslant 1. \tag{4.10}$$

Если (1.5) выполнено с $p_0 > 1$, то в случае начальной погрешности (4.9) справедлива также оценка

$$\|u_{r(\delta)} - u_*\| \leqslant c_p \rho^{1/(p+1)} \delta^{p/(p+1)}, \quad 1 < p \leqslant p_0, \tag{4.11}$$

где c_p — решение уравнения

$$c = 2^{p/(p+1)} + \gamma_* \gamma_p{}^{1/(2p)} c^{-1/p}. \tag{4.12}$$

Сходимость $u_{r(\delta)} \to u_*$ сохраняется, если на определяемое из (4.8) $r = r(\delta)$ наложить априорное ограничение $r(\delta) \leqslant d/\delta^2$, $d = \mathrm{const} > 0$; оценки (4.10) и (4.11) в таком случае верны при достаточно малых $\delta > 0$.

Доказательство. При $r = r(\delta)$ имеем $\|Au_r - f_\delta\| = \delta \geqslant \|f - f_\delta\| = \|Au_* - f_\delta\|$, и неравенство (4.5) дает

$$\|u_r - u_*\|^2 \leqslant \langle (I - A^*Ag_r(A^*A))(u_0 - u_*), u_0 - u_*\rangle. \tag{4.13}$$

Если $r(\delta)\to\infty$ при $\delta\to 0$, то отсюда немедленно следует сходимость $u_{r(\delta)}\to u_*$. Если же $r(\delta)\leqslant\bar{r}=\mathrm{const}$ при $\delta\to 0$, то сходимость $u_{r(\delta)}\to u_*$ при $\delta\to 0$ получаем из леммы 3.3 так же, как в доказательствах теорем 3.1 и 3.2.

Докажем оценку (4.10). С учетом (4.9) перепишем (4.13) в виде

$$\|u_r-u_*\|\leqslant\|K_r^{1/2}|A|^p v\|,\qquad K_r=I-A^*Ag_r(A^*A). \tag{4.14}$$

В силу условия (4.1) оператор K_r самосопряжен и неотрицателен. Теми же свойствами обладает оператор $K_r^{1/2}|A|^p$, и можно применить неравенство моментов: $\|u_r-u_*\|\leqslant\|K_r^{(p+1)/(2p)}\times$ $\times|A|^{p+1}v\|^{p/(p+1)}\|v\|^{1/(p+1)}$. При $0<p\leqslant 1$ имеем $(p+1)/(2p)\geqslant 1$. Учитывая также, что в силу (4.1) $\|K_r\|\leqslant 1$, $\|K_r^s\|\leqslant 1$ $(s\geqslant 0)$, имеем

$$\|K_r^{(c+1)/(2p)}\,|A|^{p+1}v\|\leqslant\|K_r|A|^{p+1}v\|=\|AK_r(u_0-u_*)\|.$$

Из (3.38) находим

$$\|AK_r(u_0-u_*)\|\leqslant\|Au_r-f_\delta\|+\|(I-AA^*g_r(AA^*))\,(f_\delta-f)\|\leqslant 2\delta, \tag{4.15}$$

и приходим к искомой оценке (4.10).

Докажем оценку (4.11). Из (4.14) и (1.5)

$$\|u_r-u_*\|\leqslant(\gamma_p r^{-p})^{1/2}\rho\quad(0<p\leqslant p_0). \tag{4.16}$$

Если $r(\delta)\geqslant c^{-2/p}\gamma_p^{1/p}\rho^{2/(p+1)}\delta^{-2/(p+1)}$, то отсюда

$$\|u_{r(\delta)}-u_*\|\leqslant c\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}. \tag{4.17}$$

Если же $r(\delta)\leqslant c^{-2/p}\gamma_p^{1/p}\rho^{2/(p+1)}\delta^{-2/(p+1)}$, то оценку проведем на основании (3.37) и (3.41), оценивая выражение $K_r(u_0-u_*)$ при помощи неравенства моментов и (4.15):

$$\begin{aligned}\|K_r(u_0-u_*)\|=\||A|^pK_rv\|\leqslant\||A|^{p+1}K_rv\|^{p/(p+1)}\,\|K_rv\|^{1/(p+1)}\leqslant\\ \leqslant\|AK_r(u_0-u_*)\|^{p/(p+1)}\,\|v\|^{1/(p+1)}\leqslant(2\delta)^{p/p+1)}\,\rho^{1/(p+1)}.\end{aligned}$$

В рассматриваемом случае

$$\|u_{r(\delta)}-u_*\|\leqslant(2^{p/(p+1)}+\gamma_*\gamma_p^{1/(2p)}c^{-1/p})\,\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}. \tag{4.18}$$

Оценки (4.17) и (4.18) принимают единую форму (4.11), если постоянную c определить из условия (4.12).

Рассмотрим случай, когда $\|Au_r-f_\delta\|>\delta$ при $0<r\leqslant d/\delta^2$. Тогда при указанных r выполнено (4.13), откуда с учетом выбора $r(\delta)=d/\delta^2$ получаем сходимость $\|u_{r(\delta)}-u_*\|\to 0$ при $\delta\to 0$. Если начальная погрешность представима в виде (4.9), то из (4.13) получаем (4.14) и (4.16); выбор $r(\delta)=d/\delta^2$ приводит к оценке $\|u_{r(\delta)}-u_*\|\leqslant\gamma_p^{1/2}d^{-p/2}\rho\delta^p$ $(0<p\leqslant p_0)$, более точной при малых δ, чем (4.10) и (4.11). Другими словами, априорное ограничение не выбирать r бо́льшим, чем d/δ^2, не портит оценок (4.10) и (4.11) при малых $\delta>0$. Теорема 4.2 доказана.

В связи с оценкой (4.10) отметим следующее. Если $r=r(\delta)$ выбрать из условия

$$b_1\delta \leqslant \|Au_r - f_\delta\| \leqslant b_2\delta, \qquad b_1, b_2 = \mathrm{const}, \qquad 1 \leqslant b_1 \leqslant b_2, \tag{4.19}$$

то в случае начальной погрешности (4.9) справедлива оценка

$$\|u_{r(\delta)} - u_*\|^2 + \beta r(\delta)\,(b_1^2 - 1)\,\delta^2 \leqslant \\ \leqslant [(b_2+1)^{p/(p+1)}\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}]^2, \quad 0 < p \leqslant 1 \tag{4.20}$$

(ее доказательство основано на (4.5) и получается повторением выкладок при выводе (4.10)). Отсюда

$$\|u_{r(\delta)} - u_*\| \leqslant (b_2+1)^{p/(p+1)}\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}, \quad 0 < p \leqslant 1, \tag{4.21}$$

причем в случае $b_1 > 1$

$$r(\delta) \leqslant \beta^{-1}\,(b_1^2 - 1)^{-1}\,(b_2+1)^{2p/(p+1)}\rho^{2/(p+1)}\,\delta^{-2/(p+1)}. \tag{4.22}$$

Правая часть оценки (4.21) тем меньше, чем меньше b_2. Но было бы поспешным делать вывод, что наивысшая точность действительно достигается при $b_1=b_2=1$, т. е. по правилу (4.8),— оценку (4.21) мы получили из (4.20) отбрасыванием в левой части члена $\beta r(\delta)\,(b_1^2 - 1)\,\delta$.

Оценка (4.21) более точна, чем оценка {(3.34), (3.35)} при $0 < p \leqslant 1$.

Отметим, что оценку на $r(\delta)$ можно получить только при условии $b_1 > 1$. В случае правила (4.8) $r(\delta)$ может оказаться при фиксированном δ сколь угодно большим в зависимости от f_δ, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$.

4.5. **Критический уровень невязки в итерационных методах.** Рассмотрим класс итерационных методов (см. п. 4.2 гл. II)

$$u_n = u_{n-1} - g(A^*A)A^*(Au_{n-1} - f_\delta), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.23}$$

где функция $g : [0, a] \to R$ ограниченна, измерима по Борелю и

$$g(\lambda) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant 1 - \lambda g(\lambda) \leqslant g(\lambda)/\varkappa \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant a), \quad \varkappa = \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} g(\lambda). \tag{4.24}$$

Теорема 4.3. Пусть $A \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A\|^2 \leqslant a$, $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$, $\|Au_0 - f_\delta\| > \delta$ и выполнено условие (4.24). Остановим итерации (4.23) на первом $n = n(\delta)$, для которого

$$\|Au_n - f_\delta\| \leqslant \delta. \tag{4.25}$$

Тогда $u_{n(\delta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$, причем в случае начальной погрешности (4.9) справедливы оценки

$$\|u_{n(\delta)} - u_*\| \leqslant 2^{p/(p+1)}\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)} + \varkappa'\delta, \quad 0 < p \leqslant 1, \tag{4.26}$$

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}}\, \frac{\|u_{n(\delta)} - u_*\|}{\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}} \leqslant \hat{c}_p, \quad 1 < p < \infty, \tag{4.27}$$

где

$$\varkappa' = \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} \lambda^{1/2} g(\lambda), \tag{4.28}$$

а $\hat{c}_p$ — решение уравнения

$$c=2^{p/(p+1)}+\theta(p/e)^{1/2}c^{-1/p}, \qquad \theta\approx 0{,}6382. \tag{4.29}$$

Сходимость $u_{n(\delta)}\to u_*$ при $\delta\to 0$ и оценка (4.27) сохраняются, если в качестве $n=n(\delta)$ выбрать первое n, для которого выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\|Au_n-f_\delta\|\leqslant\delta, \quad n\geqslant d/\delta^2 \quad (d=\mathrm{const}>0); \tag{4.30}$$

оценка (4.26) остается справедливой при достаточно малых $\delta>0$.

Доказательство. Приближения (4.23) имеют форму (1.3) с порождающими функциями

$$g_n(\lambda)=\sum_{j=0}^{n-1}(1-\lambda g(\lambda))^j g(\lambda)=\lambda^{-1}[1-(1-\lambda g(\lambda))^n], \quad n=1,2,\ldots$$

(см. п. 4.1 гл. II). Эти функции допускают естественное расширение на вещественные r:

$$g_r(\lambda)=\lambda^{-1}[1-(1-\lambda g(\lambda))^r] \quad (0<\lambda\leqslant a), \quad g_r(0)=rg(0), \quad r\geqslant 1.$$

Формула (1.3) позволяет определить u_r для всех $r\geqslant 1$. Нетрудно проверить, что для u_r сохраняется соотношение (4.23):

$$u_{r+1}=u_r-g(A^*A)A^*(Au_r-f_\delta), \quad r\in R, \quad r\geqslant 1. \tag{4.31}$$

По леммам 4.1 и 4.2 гл. II функции $g_r\colon [0,a]\to R$, $r\geqslant 1$, удовлетворяют условиям (4.1) и (1.5) с $p_0=\infty$, причем

$$\hat{\gamma}_*\equiv\overline{\lim_{r\to\infty}}\{r^{-1/2}\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}\lambda^{1/2}g_r(\lambda)\}=\theta[g(0)]^{1/2}, \quad \theta\approx 0{,}6382,$$

$$\hat{\gamma}_p\equiv\overline{\lim_{r\to\infty}}\{r^p\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}\lambda^p|1-\lambda g_r(\lambda)|\}=p^p[g(0)e]^{-p}, \quad 0\leqslant p<\infty. \tag{4.32}$$

Выполнены и условия (3.5) и (3.6).

К приближению u_r применима теорема 4.2. Ввиду убывания невязки $\|Au_r-f_\delta\|$ по r для определяемого условием (4.8) $r=r(\delta)$ имеем $n(\delta)-1<r(\delta)\leqslant n(\delta)$, где $n(\delta)$ — первое n, для которого выполнено (4.25); заметим, что $n(\delta)\geqslant 1$, так как $\|Au_0-f_\delta\|>\delta$. Для $u_{r(\delta)}$ справедлива оценка (4.10), а оценку (4.11) можно дополнить ее асимптотическим вариантом

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\|u_{r(\delta)}-u_*\|\rho^{-1/(p+1)}\delta^{-p/(p+1)}\leqslant\hat{c}_p,$$

где $\hat{c}_p$ — решение уравнения (4.12) с асимптотическими значениями констант, определенными в (4.32), т. е. $\hat{c}_p$ — решение уравнения (4.29). Доказательство теоремы будет завершено, если установить, что

$$\|u_{n(\delta)}-u_{r(\delta)}\|\leqslant\varkappa'\delta. \tag{4.33}$$

Ясно, что $g_{r_1}(\lambda)>g_r(\lambda)$ при $r_1\geqslant r$, причем $g_{r_1}(\lambda)-g_r(\lambda)$ возрастает по r_1 $(r_1 \geqslant r)$. В соответствии с равенством $u_{r_1} - u_r = -[g_{r_1}(A^*A) - g_r(A^*A)]A^*(Au_0 - f_\delta)$ имеем

$$\|u_{r_1} - u_r\|^2 = \int\limits_0^a [g_{r_1}(\lambda) - g_r(\lambda)]^2 \, d\langle P(\lambda) w, w\rangle, \quad w = A^*(Au_0 - f_\delta).$$

В частности,

$$\|u_{n(\delta)} - u_{r(\delta)}\|^2 = \int\limits_0^a [g_{n(\delta)}(\lambda) - g_{r(\delta)}(\lambda)]^2 \, d\langle P(\lambda) w, w\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^a [g_{r(\delta)+1}(\lambda) - g_{r(\delta)}(\lambda)]^2 \, d\langle P(\lambda) w, w\rangle = \|u_{r(\delta)+1} - u_{r(\delta)}\|^2.$$

Но из (4.31) $\|u_{r+1} - u_r\| \leqslant \varkappa' \|Au_r - f_\delta\| = \varkappa'\delta$, и мы приходим к неравенству (4.33). Теорема 4.3 доказана.

Замечание. Если останов итераций (4.23) проводить на первом $n = n(\delta)$, для которого

$$\|Au_n - f_\delta\| \leqslant b\delta \quad (b = \mathrm{const} \geqslant 1), \tag{4.34}$$

то в случае начальной погрешности (4.9) справедлива оценка

$$\|u_{n(\delta)} - u_*\| \leqslant (b+1)^{p/(p+1)} \rho^{1/(p+1)} \delta^{p/(p+1)} + \varkappa'\delta, \quad 0 < p \leqslant 1; \quad (4.35$$

в соотношении (4.27) $\hat{c}_p$ определяется как решение уравнения $c = (b+1)^{p/(p+1)} + \theta(p/e)^{1/2} c^{-1/p}$. При $b > 1$ можно оценить и $n(\delta)$ (см. (4.22)).

Переформулировка теоремы 4.3 для конкретных итерационных методов не претерпевает почти никаких изменений, уточняется только постоянная $\varkappa'$ (см. (4.26), (4.28)). В случае явной итерационной схемы

$$u_n = u_{n-1} - \mu A^*(Au_{n-1} - f_\delta), \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$(0 < \mu \leqslant 1/a, \ a \geqslant \|A\|^2)$$

имеем $g(\lambda) \equiv \mu$, $\varkappa' = a^{1/2}\mu$. В случае неявной итерационной схемы

$$\alpha u_n + A^*Au_n = \alpha u_{n-1} + A^* f_\delta, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (\alpha = \mathrm{const} > 0)$$

имеем $g(\lambda) = (\alpha + \lambda)^{-1}$, $\varkappa' = {}^1/_2 \alpha^{-1/2}$. Выполнение условия (4.24) в случае этих и некоторых других итерационных методов отмечалось в п. 4.3 гл. II.

5. Оптимальность по порядку в ослабленных нормах

5.1. **Обсуждение примера с интегральным уравнением.** Пусть требуется решить интегральное уравнение первого рода

$$(Au)(t) \equiv \int\limits_a^b \mathcal{K}(t, s)\, u(s)\, ds = f(t) \quad (c \leqslant t \leqslant d). \tag{5.1}$$

Допустим, что интегральный оператор A уравнения (5.1) вполне непрерывен как оператор из $L^2(a, b)$ в $L^2(c, d)$, а правая часть известна с малой среднеквадратичной погрешностью: $\|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta$. Пусть о точном решении u (5.1) известно, что оно принадлежит соболевскому пространству $W^{m,2}(a, b)$. Как уже отмечалось в п. 1.2 гл. II, такую априорную информацию можно учесть, рассматривая в уравнении (5.1) A как оператор из $H = W^{m,2}(a, b)$ в $F = L^2(c, d)$, используя соответствующую симметризацию $A^*Au = A^*f$ уравнения (5.1) и строя по ней методы класса (1.3) (некоторые из этих методов для интегрального уравнения (5.1) конкретизированы в пп. 1.4 и 2.1 гл. II). Результаты разд. 1—4 дают условия сходимости приближений $u_{r(\delta)}$ к точному решению по норме $W^{m,2}(a, b)$. Поскольку пространство $W^{m,2}(a, b)$ непрерывно (и даже компактно) вложено в пространство $C[a, b]$, то приближения $u_{r(\delta)}$ будут сходиться и по норме $C[a, b]$.

Обычно представляет интерес найти хорошие аппроксимации к точному решению уравнения (5.1) именно в норме $C[a, b]$. Поэтому естественно поставить вопрос о таком выборе параметра $r = r(\delta)$ в приближении (1.3), чтобы в результате получить оптимальный или хотя бы оптимальный по порядку метод решения уравнения (5.1) на множествах вида

$$\mathscr{M}_\rho = \{u \in W^{m,2}(a,\ b) \colon\ \|u - u_0\|_{W^{m,2}} \leqslant \rho\}, \quad \rho > 0,$$

когда погрешность приближения измеряется по норме $C[a, b]$.

5.2. **Постановка вопроса.** Обсуждение примера п. 5.1 дает мотивировку следующей постановки вопроса. Дано уравнение (1.1) с оператором $A \in \mathscr{L}(H, F)$, где H, F — гильбертовы пространства. Дано также банахово пространство E, в которое H непрерывно вкладывается: $H \subseteq E$, $\|u\|_E \leqslant c_{EH}\|u\|_H$ $\forall u \in H$ ($c_{EH} = \mathrm{const}$). Выделим в E подмножество

$$\mathscr{M}_\rho = \mathscr{M}_{\rho u_0} = \{u \in H\colon\ \|u - u_0\|_H \leqslant \rho\} \subset E, \quad \rho > 0, \tag{5.2}$$

где $u_0 \in H$ — некоторый фиксированный элемент; его же используем в качестве начального в приближении (1.3). Задача заключается в таком выборе параметра r в (1.3), чтобы получить оптимальный по порядку на $\mathscr{M}_{\rho u_0}$ метод решения уравнения (1.1), когда погрешность измеряется по норме E. Иными словами, выбор $r = r(\delta)$ должен обеспечить оценку

$$\sup_{\substack{u \in H,\ f_\delta \in F \\ \|u - u_0\|_H \leqslant \rho,\ \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta}} \|u_{r(\delta)} - u\|_E \leqslant c \inf_{\substack{\mathscr{P} \\ \mathscr{P}\colon F \to E}} \sup_{\substack{u \in H,\ f_\delta \in F \\ \|u - u_0\|_H \leqslant \rho,\ \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta}} \|\mathscr{P} f_\delta - u\|_E. \tag{5.3}$$

Постоянная c здесь указывает, насколько соответствующий метод уступает оптимальным на $\mathscr{M}_\rho$ методам (в случае оптимального метода $c = 1$).

5.3. **Априорный выбор** r. Теорема 5.1. Пусть $A \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A\|^2 \leqslant a$ и выполнены условия (1.4) и (1.5) с $p_0 \geqslant 1/2$. Тогда при

$$r = d\delta^{-2}, \qquad d = \mathrm{const} > 0, \tag{5.4}$$

для приближения (1.3) справедлива оценка (5.3) с

$$c=1+\max\{\gamma_* d^{1/2}\rho^{-1}+\gamma', \quad \gamma_{1/2} d^{-1/2}\rho+\gamma_0\}, \tag{5.5}$$

$$\gamma' \equiv \sup_{r>0} \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} |\lambda g_r(\lambda)| \leqslant 1+\gamma_0. \tag{5.6}$$

Доказательство достаточно провести в случае $u_0=0$; случай произвольного $u_0\in H$ к нему сводится заменами $u-u_0=v$, $u_r-u_0=v_r$. Итак, $\mathscr{M}_\rho=\mathscr{M}_{\rho_0}=\{u\in H: \|u\|_H\leqslant\rho\}$ — центрально-симметричное выпуклое ограниченное множество в E. В силу теоремы 3.5 гл. I неравенство (5.3) для приближения (1.3) будет выполнено с $c=1+\max\{c_1, c_2\}$, если

$$\|u_r\|\leqslant c_1\rho, \quad \|Au_r-f_\delta\|\leqslant c_2\delta \quad (c_1\geqslant 1, c_2\geqslant 1) \tag{5.7}$$

для всякого $f_\delta\in F$, для которого существует $u\in H$ со свойствами $\|u\|_H\leqslant\rho$, $\|Au-f_\delta\|\leqslant\delta$. Для приближения (1.3) с $u_0=0$ имеем

$$u_r=g(A^*A)A^*(f_\delta-Au)+g_r(A^*A)A^*Au,$$

$$Au_r-f_\delta=-A(I-A^*Ag_r(A^*A))u-(I-AA^*g_r(AA^*))(f_\delta-Au).$$

При помощи (1.4), (1.5) и (5.6) получаем, что при всех $r>0$

$$\|u_r\|_H\leqslant\gamma_* r^{1/2}\delta+\gamma'\rho, \tag{5.8}$$

$$\|Au_r-f_\delta\|\leqslant\gamma_{1/2} r^{-1/2}\rho+\gamma_0\delta. \tag{5.9}$$

В частности, выбрав r в соответствии с (5.4), имеем

$$\|u_r\|_H\leqslant\gamma_* d^{1/2}+\gamma'\rho, \qquad \|Au_r-f_\delta\|\leqslant(\gamma_{1/2} d^{-1/2}\rho+\gamma_0)\delta,$$

т. е. (5.7) выполнено с $c_1=\gamma_* d^{1/2}\rho^{-1}+\gamma'$, $c_2=\gamma_{1/2} d^{-1/2}\rho+\gamma_0$. Тем самым (5.3) выполнено с постоянной c, указанной в (5.5). Теорема 5.1 доказана.

Для метода А. Н. Тихонова выбор параметра регуляризации (5.4) предложен в [71].

Если, кроме (1.4) и (1.5), выполнено условие

$$0\leqslant 1-\lambda g_r(\lambda)\leqslant 1 \quad (0\leqslant\lambda\leqslant a), \quad r>0, \tag{5.10}$$

то $\gamma_0=\gamma'=1$; минимизируя постоянную (5.5) по d, получаем $d=(\gamma_{1/2}/\gamma_*)\rho^2$, т. е. r желательно выбирать так:

$$r=(\gamma_{1/2}/\gamma_*)\rho^2\delta^{-2}; \tag{5.11}$$

ему соответствует оценка (5.3) с

$$c=2+(\gamma_*\gamma_{1/2})^{1/2}. \tag{5.12}$$

Теорему 5.1, а также три следующие теоремы следует расценивать как теоремы сравнения методов. Они не утверждают сходимости метода. Однако если вложение $H\subset E$ компактно и $\mathscr{N}(A)=0$, то из неравенства (5.3) на основании теорем 3.2 и 3.3 гл. I получаем

$$\sup_{u\in\mathscr{M}_\rho,\ f_\delta\in F,\ \|Au-f_\delta\|\leqslant\delta} \|u_{r(\delta)}-u\|_E\to 0 \quad \text{при } \delta\to 0.$$

5.4. **Выбор r по принципу невязки.** Теорема 5.2. Пусть $A\in\mathscr{L}(H,F)$, $\|A\|^2\leqslant a$ и выполнены условия (1.4) и (1.5) с $\rho_0\geqslant 1/2$, $\gamma_0=1$. Выберем параметр r в приближении (1.3) по правилу П или П′ (см. п. 3.2). Тогда справедлива оценка (5.3), в которой в случае правила П

$$c=1+\max\{\gamma_*\gamma_{1/2}(b_1-1)^{-1}+\gamma',\ b_2\},\tag{5.13}$$

а в случае правила П′

$$c=1+\max\{\Theta^{-1/2}[\gamma_*\gamma_{1/2}(b-1)^{-1}+\gamma'],\ b\},\tag{5.14}$$

где b_1, b_2, b, Θ — постоянные из правил П и П′.

Доказательство сводится к проверке условий (5.7) для приближения (1.3) с $u_0=0$, в котором $r=r(\delta)$ определено по правилу П или П′. Напомним, что при всех $r>0$ имеют место неравенства (5.8) и (5.9). Из (5.9) и (3.11) находим, что $r^{1/2}\leqslant\gamma_{1/2}(b_1-1)^{-1}\rho\delta^{-1}$; подставляя эту оценку в (5.8), получаем $\|u\|_H\leqslant[\gamma_*\gamma_{1/2}(b_1-1)^{-1}+\gamma']\rho$. Итак, (5.7) выполнено с $c_1=\gamma_*\gamma_{1/2}(b_1-1)^{-1}+\gamma'$, $c_2=b_2$ и доказательство в случае правила П завершено. В случае правила П′ доказательство аналогично. Теорема 5.2 доказана.

Допустим опять, что выполнено условие (5.10). Минимизируя (5.13) по b_1 и b_2 ($b_2\geqslant b_1>1$), видим, что правило П желательно использовать с

$$b_1=b_2=1+(\gamma_*\gamma_{1/2})^{1/2};\tag{5.15}$$

тогда оценка (5.3) справедлива с

$$c=2+(\gamma_*\gamma_{1/2})^{1/2},\tag{5.16}$$

как и в случае априорного выбора (5.11). Подчеркнем, что теперь мы получили этот результат, не располагая информацией о величине ρ. В этом смысле принцип невязки имеет большое преимущество перед априорным выбором r. Обратим внимание и на следующее любопытное обстоятельство: постоянная c в (5.3) в случае выбора r по правилам П или П′ не зависит не только от ρ, но и от нормы пространства E, в которое H вкладывается (см. (5.14), (5.16)). Таким образом, метод имеет одинаковый оптимальный порядок сразу по всем нормам, подчиненным норме исходного пространства H.

Для подкласса методов (1.3), выделяемых условиями (4.1), в разд. 4 был обоснован выбор параметра r из критического уровня невязки. Обсудим целесообразность такого выбора с точки зрения получаемой при этом оценки (5.3).

Теорема 5.3. Пусть $A\in\mathscr{L}(H,F)$, $\|A\|^2\leqslant a$ и выполнены условия (4.1). Допустим, что для приближения (1.3)

$$\|Au_r-f_\delta\|=b\delta,\quad b\geqslant 1.\tag{5.17}$$

Тогда справедлива оценка (5.3) с

$$c=1+\max\{b,\ \gamma_*[\gamma_*^2+\beta(b^2-1)]^{-1/2}+1\},\tag{5.18}$$

где β — постоянная из условия (4.1).

Доказательство. Пусть $u_0=0$, а $f_\delta\in F$ таково, что для него существует $u\in H$ со свойствами $\|u\|_H\leqslant\rho$, $\|Au-f_\delta\|\leqslant\delta$. Как и в случае предыдущих теорем, надо установить неравенства (5.7), оценив по пути постоянные c_1, c_2 в них. В силу (4.5) и (5.17) имеем $\|u_r-u\|^2+\beta r(b^2-1)\delta^2\leqslant\|u\|^2\leqslant\rho^2$, поэтому

$$\|u_r\|\leqslant\|u_r-u\|+\|u\|\leqslant[\rho^2-3r(b^2-1)\delta^2]^{1/2}+\rho.$$

Если для $r=r(\delta)$, определяемого уровнем невязки (5.17), имеет место неравенство

$$r\geqslant[\gamma_*^2+\beta(b^2-1)]^{-1}\rho^2\delta^{-2}\equiv r',$$

то предыдущая оценка $\|u_r\|$ примет вид

$$\|u_r\|_H\leqslant\{\gamma_*[\gamma_*^2+\beta(b^2-1)]^{-1/2}+1\}\rho. \tag{5.19}$$

Если же, наоборот, $r\leqslant r'$, то к точно такой же оценке (5.19) приходим просто на основании (5.8), учитывая, что в данном случае $\gamma'=1$. Итак, каково бы ни было $r=r(\delta)$, справедлива оценка (5.19). Совместо с (5.17) это означает, что (5.7) выполнено с $c_1=\gamma_*[\gamma_*^2+\beta(b^2-1)]^{-1/2}+1$, $c_2=b$. Значит, справедлива оценка (5.3) с постоянной c, указанной в (5.18). Теорема 5.3 доказана.

В частности, если в (5.17) положить $b=1$, т. е. вычисление u_r довести до критического уровня невязки $\|Au_r-f_\delta\|=\delta$, то оценка (5.3) имеет место с $c=3$. Это не лучший результат, которого можно добиться. Постоянная (5.18) примет наименьшее значение, если $b=\gamma_*[\gamma_*^2+\beta(b^2-1)]^{-1/2}+1$, что приводит к уравнению

$$\beta(b^2-1)(b-1)^2+\gamma_*^2(b-1)^2-\gamma_*^2=0 \tag{5.20}$$

относительно рекомендуемого b. Нетрудно видеть, что в области $b\geqslant1$ это уравнение имеет ровно одно решение. Для конкретных методов отсюда проще всего b найти численно.

5.5. **Еще один способ выбора** r возможен, если известно число ρ, определяющее класс (5.2). Предлагаемый способ интересен тем, что он применим и в ситуации, когда неизвестен уровень δ погрешности правой части уравнения (1.1). А именно выберем такое $r=r(\delta)$, что

$$d_1\rho\leqslant\|u_r-u_0\|_H\leqslant d_2\rho,\qquad d_2\geqslant d_1>\gamma', \tag{5.21}$$

где γ' — определенное в (5.6) число, d_1 и d_2 — задаваемые числа. Зависимость r от δ непосредственно не видна, но все же она имеет место (см. ниже доказательство теоремы 5.4).

Обсудим вопрос о существовании r, при которых выполнены соотношения (5.21). Допустим, что имеет место (3.6), тогда u_r непрерывно (по норме H) зависит от r. Если $Qf_\delta\overline{\in}\mathscr{R}(A)=AH$, то по теореме 5.2 гл. II $\|u_r\|_H\to\infty$ при $r\to\infty$. В таком случае $\|u_r-u_0\|_H$ принимает все значения от 0 (при $r=0$) до ∞ (при $r\to\infty$) и существует r, при котором выполнено (5.21). Если же $Qf_\delta\in\mathscr{R}(A)$, то по той же теореме u_r сходится при $r\to\infty$ по норме H к решению уравнения $Au=Qf_\delta$, ближайшему к u_0, и может случиться, что $\|u_r-u_0\|_H<d_1\rho$ при всех $r>0$. Договоримся в этом случае считать, что правило (5.21) выдает $r=\infty$ с $u_\infty=\lim\limits_{r\to\infty}u_r$.

Практический выбор r из условия (5.21) упрощается в случае монотонной зависимости $\|u_r-u_0\|_H$ от r. Если выполнены условия (3.5) и (5.10), то $\|u_r-u_0\|_H$ является неубывающей функцией r. Действительно, из (3.5) и (5.10) вытекает, что $0\leqslant g_{r_1}(\lambda)\leqslant\leqslant g_{r_2}(\lambda)$ при $0<r_1<r_2$, $0\leqslant\lambda\leqslant a$, и утверждение о монотонности $\|u_r-u_0\|_H$ вытекает из равенств $u_r-u_0=g_r(A^*A)A^*(f_\delta-Au_0)$,

$$\|u_r-u_0\|_H^2=\int_0^a|g_r(\lambda)|^2d\langle P(\lambda)w,w\rangle,\ w=A^*(Au_0-f_\delta),$$

где $P(\lambda)$ — спектральное семейство проекторов оператора A^*A.

Видоизменение правила (5.21) для итерационных методов таково: итерации останавливаем на первом $n=n(\delta)$, для которого

$$\|u_n-u_0\|_H\geqslant d\rho\quad(d=\mathrm{const}>\gamma'). \tag{5.22}$$

Теорема 5.4. Пусть $A\in\mathscr{L}(H,F)$, $\|A\|^2\leqslant a$ и выполнены условия (1.4) и (1.5) с $p_0\geqslant1/2$. Выберем параметр $r=r(\delta)$ в приближении (1.3) таким образом, чтобы выполнялось (5.21). Тогда справедлива оценка (5.3) с постоянной

$$c=1+\max\{d_2,\ \gamma_*\gamma_{1/2}(d_1-\gamma')^{-1}+\gamma_0\}. \tag{5.23}$$

Доказательство. Дело сводится опять к проверке условий (5.7) для приближения (1.3) с $u_0=0$, в котором параметр r удовлетворяет условиям (5.21) тоже с $u_0=0$. При всех $r>0$ справедливы неравенства (5.8) и (5.9). Из (5.8) и (5.21) находим $r^{1/2}\geqslant\gamma_*^{-1}(d_1-\gamma')\rho\delta^{-1}$; подставляя это неравенство в (5.9), получаем $\|Au_r-f_\delta\|\leqslant[\gamma_*\gamma_{1/2}(d_1-\gamma')^{-1}+\gamma_0]\delta$. Совместно с (5.21) это означает, что (5.7) выполнено с $c_1=d_2$, $c_2=\gamma_*\gamma_{1/2}(d_1-\gamma')^{-1}+\gamma_0$. Применение теоремы 3.5 гл. I дает оценку (5.3) с постоянной c, указанной в (5.23). Теорема 5.4 доказана.

Допустим, что выполнено условие (5.10), вследствие чего $\gamma_0=\gamma'=1$. Минимизируя постоянную (5.23) по d_1 и d_2 $(d_2\geqslant d_1>1)$, получаем рекомендуемые значения $d_1=d_2=1+(\gamma_*\gamma_{1/2})^{1/2}$; им соответствует оценка (5.3) с $c=2+(\gamma_*\gamma_{1/2})^{1/2}$, как и в случае априорного выбора и выбора по невязке на уровне $\|Au_r-f_\delta\|=[1+$ $+(\gamma_*\gamma_{1/2})^{1/2}]\delta$.

5.6. **Приложение к конкретным методам.** Конкретизируем высказанные рекомендации о выборе параметра для метода А. Н. Тихонова и итерационных методов. В случае метода А. Н. Тихонова

$$u_\alpha=(\alpha I+A^*A)^{-1}A^*f_\delta\quad(\alpha=r^{-1};\ u_0=0) \tag{5.24}$$

выполнены условия (1.4), (1.5), (4.1), (5.10); при этом $\gamma=\beta=1$, $\gamma_*=\gamma_{1/2}=1/2$, $\gamma_0=\gamma'=1$. Рекомендуемые правила выбора α принимают вид: $\alpha=\rho^{-2}\delta^2$ в случае известных ρ и δ; уровень невязки $\|Au_\alpha-f_\delta\|={}^3/_2\delta$ в случае известного δ; уровень $\|u_\alpha\|_H={}^3/_2\rho$ в случае известного ρ. Каждый из этих выборов α обеспечивает выполнение неравенства (5.3) с $c=2{,}5$. Привлечение теоремы 5.3

позволяет несколько улучшить результат о выборе α по принципу невязки: решением уравнения (5.20) являются $b \approx 1{,}436$ и при $\|Au_\alpha - f_\delta\| = b\delta$ оценка (5.3) справедлива с $c=2{,}436$. Для тихоновского приближения к весьма хорошему результату приводит критический уровень невязки $\|Au_\alpha - f_\delta\| = \delta$. Действительно, u_α минимизирует функционал $\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha \|u\|_H^2$ на H, а при $\alpha = r^{-1}$, определенном по правилу П с $b_1 = b_2 = 1$, также функционал $\|u\|_H$ на множестве $\{u \in H : \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta\}$, вследствие чего (5.7) выполнено с $c_1 = c_2 = 1$, а (5.3) — с $c=2$. Такой же результат справедлив при выборе α из условия $|u_\alpha\|_H = \rho$.

Непрерывный аналог итерационных методов

$$u'(t) + A^* A u(t) = A^* f_\delta, \quad u(0) = u_0, \tag{5.25}$$

как мы знаем, укладывается в рамки условий (1.3)—(1.5), (4.1), (5.10); при этом $\gamma = \beta = 1$, $\gamma_* = \theta \approx 0{,}6382$, $\gamma_{1/2} = (2\mathrm{e})^{-1/2}$, $\gamma_0 = \gamma' = 1$. Рекомендуемые значения момента останова t принимают следующий вид: $t = \theta^{-1}(2e)^{-1/2}\rho^2\delta^{-2} \approx 0{,}672\rho^2\delta^{-2}$ при известных δ и ρ; уровень невязки $\|Au(t) - f_\delta\| = [1 + \theta^{1/2}(2e)^{-1/4}]\delta \approx 1{,}523\delta$ в случае известного δ; уровень $\|u(t) - u_0\|_H = [1 + \theta^{1/2}(2e)^{-1/4}]\rho \approx 1{,}523\rho$ в случае известного ρ. Каждый из этих выборов обеспечивает выполнение оценки (5.3) с $c = 2 + \theta^{1/2}(2e)^{-1/4} \approx 2{,}523$. Решая (5.20), получаем $b \approx 1{,}497$, и уровень невязки $\|Au(t) - f_\delta\| = b\delta$ обеспечивает оценку (5.3) с $c \approx 2{,}497$.

Для класса итерационных методов

$$u_n = u_{n-1} - g(A^*A)A^*(Au_{n-1} - f_\delta), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.26}$$

с функцией $g : [0, a] \to R$, удовлетворяющей условиям леммы 4.2 гл. II, справедливы результаты, вполне аналогичные перечисленным выше о непрерывном аналоге. При известных δ и ρ выбираем $n(\delta) = \operatorname{int}\{(\theta g(0))^{-1}(2e)^{-1}\rho^2\delta^2\} \approx \operatorname{int}\{0{,}672[\mathrm{g}(0)^{-1}\rho^2\delta^{-2}\}$; при известном δ счет останавливаем на первом $n = n(\delta)$, для которого $|Au_n f_\delta\| \leqslant [1 + \theta^{1/2}(2e)^{-1/4}]\delta \approx 1{,}523\delta$; при известном ρ счет останавливаем на первом $n = n(\delta)$, для которого $\|u_n - u_0\|_H \geqslant [1 + \theta^{1/2}(2e)^{-1/4}]\rho \approx 1{,}523\rho$. В каждом из этих трех выборов n справедлив асимптотический аналог неравенства (5.3)

$$\varlimsup_{\delta \to 0} \frac{\sup\limits_{\|u-u_0\|_H \leqslant \rho,\ f_\delta \in F,\ \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta} \| u_{n(\delta)} - u \|_E}{\inf\limits_{\mathscr{P}} \sup\limits_{\|u-u_0\|_H \leqslant \rho,\ f_\delta \in F,\ \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta} \| \mathscr{P} f_\delta - u \|_E} \leqslant \hat{c} \tag{5.27}$$

с $\hat{c} = 2 + \theta^{1/2}(2e)^{-1/4} \approx 2{,}523$. При останове на первом $n = n(\delta)$, для которого $|Au_n - f_\delta\| \leqslant 1{,}497\delta$, оценка (5.27) справедлива с $\hat{c} = 2{,}497$.

Если пространство E, в которое вкладывается H, тоже гильбертово, то возможен такой выбор параметра $\alpha = \alpha(\delta, E, \rho)$, при котором метод А. Н. Тихонова (5.24) оптимален на $M_0 = M_{\rho 0}$. Доказательство основывается на лемме 2.1.

4 глава

ЗАДАЧА С ПРИБЛИЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Эта глава по проблематике весьма близка к предыдущей. Теперь не только правая часть, но и оператор в уравнении

$$Au=f \tag{0.1}$$

считаются известными приближенно: вместо $f\in\mathscr{R}(A)$ (или $f\in F$ с $Qf\in\mathscr{R}(A)$) и $A\in\mathscr{L}(H,F)$ даны некоторые их приближения $f_\delta\in F$ и $A_\eta\in\mathscr{L}(H,F)$, $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$, $\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$. Для приближенного решения уравнения (0.1) привлекаем те же методы, что и в гл. III: в случае $H=F$, $A=A^*\geqslant0$, $A_\eta=A_\eta{}^*\geqslant0$ приближенное решение строится в виде

$$u_r=(I-A_\eta g_r(A_\eta))u_0+g_r(A_\eta)f_\delta; \tag{0.2}$$

в случае несамосопряженной задачи — в виде

$$u_r=(I-A_\eta^*A_\eta g_r(A_\eta^*A_\eta))u_0+g_r(A_\eta^*A_\eta)A_\eta^*f_\delta, \tag{0.3}$$

где u_0 — начальное приближение. Приведем сводку условий на систему измеримых по Борелю функций $g_r:[0,a]\to R$ (или $g_r:[0,a]\to\mathbf{C}$). Основные утверждения будут доказаны при условиях

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}|g_r(\lambda)|\leqslant\gamma r\quad(r>0), \tag{0.4}$$

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}\lambda^p|1-\lambda g_r(\lambda)|\leqslant\gamma_pr^{-p}\quad(r>0;\ 0\leqslant p\leqslant p_0),\quad p_0>0. \tag{0.5}$$

Предполагается, что $\|A_\eta\|\leqslant a$ (в случае метода (0.2)) или $\|A_\eta\|^2\leqslant a$ (в случае метода (0.3)). Во многих оценках фигурирует постоянная

$$\gamma_*\equiv\sup_{r>0}\{r^{-1/2}\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}\lambda^{1/2}|g_r(\lambda)|\}.$$

Часть утверждений будет доказана при ослабленном условии (0.5):

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}|1-\lambda g_r(\lambda)|\leqslant\gamma_0\quad(r>0), \tag{0.6}$$

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}\lambda|1-\lambda g_r(\lambda)|\to0\quad\text{при } r\to\infty. \tag{0.7}$$

В случае знакопеременного оператора $A=A^*$ в пространстве $H=F$ вместо (0.4)—(0.7) используются условия

$$\sup_{-a_0\leqslant\lambda\leqslant a} |g_r(\lambda)| \leqslant \gamma r \quad (r>0), \tag{0.8}$$

$$\sup_{-a_0\leqslant\lambda\leqslant a} |\lambda|^p\,|1-\lambda g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_p r^{-p} \quad (r>0;\ 0\leqslant p\leqslant p_0), \quad p_0>0, \tag{0.9}$$

$$\sup_{-a_0\leqslant\lambda\leqslant a} |1-\lambda g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_0 \quad (r>0), \tag{0.10}$$

$$\sup_{-a_0\leqslant\lambda\leqslant a} |\lambda|\,|1-\lambda g_r(\lambda)| \to 0 \quad \text{при } r\to\infty. \tag{0.11}$$

В случае, когда $A=A^*\geqslant 0$, а оператор $A_\eta=A_\eta^*$ не знакопостоянен, условие (0.4) дополняется условием

$$\sup_{-\alpha r^{-1}\leqslant\lambda\leqslant 0} |g_r(\lambda)| \leqslant \gamma^- r \quad (r>0), \quad \gamma^-=\mathrm{const}. \tag{0.12}$$

Напомним, что (см. гл. II, п. 3.4) из (0.12) следует

$$\sup_{-\alpha r^{-1}\leqslant\lambda\leqslant 0} |\lambda|^p\,|1-\lambda g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_p^- r^{-p} \quad (r>0;\ 0\leqslant p<\infty). \tag{0.13}$$

$$\gamma_p^- = (1+\alpha\gamma^-)\,\alpha^p = \mathrm{const}.$$

Свойства непрерывности и монотонности невязки приближения (0.2) и (0.3) связаны с условиями

$$g_{r_n}(\lambda)\to g_r(\lambda) \quad \text{при } r_n\to r>0 \quad \forall\lambda\in[0,a], \tag{0.14}$$

$$|1-\lambda g_{r_2}(\lambda)| \leqslant |1-\lambda g_{r_1}(\lambda)| \quad \text{при } 0\leqslant\lambda\leqslant a, \quad 0<r_1\leqslant r_2, \tag{0.15}$$

$$0\leqslant 1-\lambda g_r(\lambda)\leqslant 1 \quad (0\leqslant\lambda\leqslant a). \tag{0.16}$$

Наконец, важный подкласс методов (0.3) выделяется условиями

$$g_r(\lambda)>0, \quad 0\leqslant 1-\lambda g_r(\lambda)\leqslant g_r(\lambda)/\varkappa_r \quad (0\leqslant\lambda\leqslant a;\ r>0),$$
$$\varkappa_r \equiv \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} g_r(\lambda), \quad \beta r\leqslant\varkappa_r\leqslant\gamma r \quad (r>0), \quad \beta>0. \tag{0.17}$$

Ближайшее к начальному приближению u_0 решение (в случае $f\in\mathscr{R}(A)$) или квазирешение (в случае $Qf\in\mathscr{R}(A)$) уравнения (0.1) обозначаем через u_*, как и ранее. Здесь Q — ортопроектор в F, проектирующий на $\overline{\mathscr{R}(A)}$.

1. Оценки разности степеней операторов

1.1. **Формула разности степеней операторов.** Пусть $A=A^*\geqslant 0$ и $B=B^*\geqslant 0$. Установим формулу

$$A^\alpha - B^\alpha = -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^\alpha\,[(tI+A)^{-1}-(tI+B)^{-1}]\,dt \quad (0<\alpha<1). \tag{1.1}$$

Эта формула является следствием из формулы А. Балакришнана дробной степени оператора (см. [80]); ее можно также получить из формулы (14.16) монографии [48]. В целях полноты изложения наметим путь вывода (1.1). 1. Для $A_\varepsilon=A+\varepsilon I$, $B_\varepsilon=B+\varepsilon I$, $\varepsilon>0$, основная формула исчисления операторов (см. [36], с. 608) дает

$$A_\varepsilon^\alpha - B_\varepsilon^\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^\alpha [(\lambda I - A_\varepsilon)^{-1} - (\lambda I - B_\varepsilon)^{-1}]\, d\lambda,$$

где Γ — любой спрямляемый контур в комплексной плоскости, охватывающий спектры операторов A_ε и B_ε и лежащий в области однозначности аналитической функции λ^α; однозначность λ^α обеспечим, проведя разрез комплексной плоскости вдоль отрицательной вещественной оси. 2. Из равенства

$$(\lambda I - A_\varepsilon)^{-1} - (\lambda I - B_\varepsilon)^{-1} = (\lambda I - A_\varepsilon)^{-1}(A_\varepsilon - B_\varepsilon)(\lambda I - B_\varepsilon)^{-1}$$

вытекает оценка

$$\|(\lambda I - A_\varepsilon)^{-1} - (\lambda I - B_\varepsilon)^{-1}\| \leqslant \frac{\|A-B\|}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A_\varepsilon))\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(B_\varepsilon))}.$$

Пользуясь этой оценкой, легко убедиться, что в качестве Γ можно взять, например, параболу $\operatorname{Re}\lambda=c(\operatorname{Im}\lambda)^2$, а затем деформировать ее, прижав ветви к отрицательной вещественной оси ($c\to-\infty$); с учетом равенств $\lambda^\alpha=t^\alpha e^{i\alpha\pi}$, $\lambda^\alpha=t^\alpha e^{-i\alpha\pi}$ ($t=|\lambda|=-\lambda$) на верхней и нижней ветвях это приводит к равенству (1.1) для положительно определенных операторов A_ε и B_ε. 3. Предельным переходом $\varepsilon\to0$ получаем формулу (1.1) для A и B. Предельный переход осуществим ввиду неравенства

$$\|(tI+A_\varepsilon)^{-1}-(tI+B_\varepsilon)^{-1}\leqslant\max\{\|(tI+A_\varepsilon)^{-1}\|,\ \|tI+B_\varepsilon)^{-1}\|\}\leqslant t^{-1},$$

которым мы воспользуемся вблизи нуля, и неравенства

$$\|(tI+A_\varepsilon)^{-1}-(tI+B_\varepsilon)^{-1}\|\leqslant\|A-B\|t^{-2},$$

которым воспользуемся при больших t.

1.2. Случай самосопряженных неотрицательных операторов. Лемма 1.1. Пусть $A=A^*\geqslant0$, $A_\eta=A_\eta^*\geqslant0$, $\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$. Тогда при любом вещественном $p\geqslant0$ справедлива оценка

$$\|A_\eta^p - A^p\| \leqslant c_p\eta^{\min\{1,p\}}, \qquad c_p=\text{const}. \tag{1.2}$$

Если $\|A\|\leqslant a$, $\|A_\eta\|\leqslant a$ и выполнено условие (0.5), то при $p>0$

$$\|A_\eta G_{r\eta}(A_\eta^p - A^p)\| \leqslant \varepsilon_{rp}\eta, \qquad \varepsilon_{rp}\to0 \text{ при } r\to\infty, \tag{1.3}$$

где введено обозначение $G_{r\eta}=I-A_\eta g_r(A_\eta)$.

Доказательство. Докажем оценку (1.2). Рассмотрим сперва случай $p=\alpha\in(0, 1)$. По формуле (1.1)

$$A_\eta^\alpha - A^\alpha = -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_0^\infty t^\alpha[(tI+A_\eta)^{-1}-(tI+A)^{-1}]\,dt. \tag{1.4}$$

На $(0, \eta)$ воспользуемся оценкой $\|(tI+A_\eta)^{-1}-(tI+A)^{-1}\|\leqslant t^{-1}$, а на (η, ∞) — оценкой $\|(tI+A_\eta)^{-1}-(tI+A)^{-1}\|\leqslant \eta t^{-2}$, вытекающей из равенства

$$(tI+A_\eta)^{-1}-(tI+A)^{-1}=(tI+A_\eta)^{-1}(A-A_\eta)(tI+A)^{-1}. \qquad (1.5)$$

В результате приходим к оценке (1.2):

$$\|A_\eta^\alpha - A^\alpha\| \leqslant \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{\eta^\alpha}{\alpha}+\eta\frac{\eta^{\alpha-1}}{1-\alpha}\right)\leqslant 2\eta^\alpha \quad (0<\alpha<1).$$

При $p=0$ оценка (1.2) тривиальна. При целом $p=k\geqslant 1$ из равенства

$$A_\eta^k - A^k = \sum_{j=0}^{k-1} A_\eta^j (A_\eta - A) A^{k-1-j}$$

получаем $\|A_\eta^k-A^k\|\leqslant c_k\eta$, т. е. оценка (1.2) верна и в таком случае. Наконец, при $p=k+\alpha$, где $k\geqslant 1$ целое, $\alpha\in(0, 1)$, имеем $A_\eta^p-A^p=A_\eta^k(A_\eta^\alpha-A^\alpha)+(A_\eta^k-A^k)A^\alpha$, и в оценке нуждается только член

$$A_\eta^k(A_\eta^\alpha - A^\alpha) = -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^\alpha A_\eta^k[(tI+A_\eta)^{-1}-(tI+A)^{-1}]\,dt.$$

При помощи (1.5) и неравенства $\|A_\eta(tI+A_\eta)^{-1}\|\leqslant 1$ оцениваем

$$\|A_\eta^k[(tI+A_\eta)^{-1}-(tI+A)^{-1}]\|\leqslant\begin{cases}\|A_\eta\|^{k-1}t^{-1}\eta.\\ \|A_\eta\|^k t^{-2}\eta.\end{cases}$$

Пользуясь первой оценкой на $(0, 1)$ и второй на $(1, \infty)$, получаем $\|A_\eta^k(A_\eta^\alpha-A^\alpha)\|\leqslant\|A_\eta\|^{k-1}(1+\|A_\eta\|)\eta$, и доказательство (1.2) завершено.

Докажем оценку (1.3). Для простоты допустим, что условие (0.5) выполнено с $p_0\geqslant 1$. При $p\geqslant 1$ оценка (1.3) немедленно вытекает из (0.5) и (1.2), причем $\varepsilon_{rp}=c_p\gamma_1 r^{-1}$. При $p=\alpha\in(0, 1)$ имеем (см. (1.4))

$$A_\eta G_{r\eta}(A_\eta^\alpha - A^\alpha) = -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^\alpha A_\eta G_{r\eta}[(tI+A_\eta)^{-1}-(tI+A)^{-1}]\,dt.$$

Пусть $\beta\in(0, \alpha)$. Замечая, что $\|A_\eta^{1-\beta}(tI+A_\eta)^{-1}\|\leqslant t^{-\beta}$, находим

$$\|A_\eta G_{r\eta}[(tI+A_\eta)^{-1}-(tI+A)^{-1}]\|\leqslant\begin{cases}\gamma_\beta r^{-\beta}t^{-\beta-1}\eta,\\ \gamma_1 r^{-1}t^{-2}\eta.\end{cases}$$

Пользуясь опять первой оценкой на $(0, 1)$, а второй на $(1, \infty)$, приходим к оценке (1.3), в которой $\varepsilon_{r\alpha}=\gamma_\beta r^{-\beta}\pi^{-1}(\alpha-\beta)^{-1}\sin\alpha\pi+\gamma_1 r^{-1}$. Если положить $\beta=\alpha/2$, то $\varepsilon_{r\alpha}=2\gamma_{\alpha/2}r^{-\alpha/2}+\gamma_1 r^{-1}$. Лемма 1.1 доказана.

1.3. Случай несамосопряженных операторов. Для A, $A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$ обозначим $|A| = (A^*A)^{1/2}$, $|A_\eta| = (A_\eta^* A_\eta)^{1/2}$, $B = A^*A$, $B_\eta = A_\eta^* A_\eta$.

Лемма 1.2. Пусть $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$. Тогда при любом вещественном $p \geqslant 0$ справедлива оценка

$$\| |A_\eta|^p - |A|^p \| \leqslant c_p (1 + |\ln \eta|)\, \eta^{\min\{1,p\}}, \qquad c_p = \mathrm{const}. \tag{1.6}$$

Если $\|A\|^2 \leqslant a$, $\|A_\eta\|^2 \leqslant a$ и выполнено условие (0.5), то при $p > 0$

$$\| A_\eta K_{r\eta} (|A_\eta|^p - |A|^p) \| \leqslant \varepsilon_{rp} \eta, \ \varepsilon_{rp} \to 0 \quad \text{при } r \to \infty, \tag{1.7}$$

где $K_{r\eta} = I - A_\eta^* A_\eta g_r (A_\eta^* A_\eta)$.

Доказательство. Неравенство (1.6) равносильно неравенству

$$\| B_\eta^p - B^p \| \leqslant c_p' (1 + |\ln \eta|)\, \eta^{\min\{1,2p\}}, \qquad c_p' = c_{2p}, \tag{1.8}$$

которое удобнее доказывать. Для целого $p = k \geqslant 1$ из равенств

$$B_\eta^k - B^k = \sum_{j=0}^{k-1} B_\eta^j (B_\eta - B) B^{k-1-j}, \qquad B_\eta - B = A_\eta^* (A_\eta - A) + {}$$
$$+ (A_\eta^* - A^*) A$$

следует более точная, чем (1.8), оценка

$$\| B_\eta^k - B^k \| \leqslant c_k' \eta \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1.9}$$

При $p = \alpha \in (0, 1)$ по формуле (1.1) иемеем

$$B_\eta^\alpha - B^\alpha = -\frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty t^\alpha [(tI + B_\eta)^{-1} - (tI + B)^{-1}]\, dt. \tag{1.10}$$

На $(0, \eta^2)$ воспользуемся оценкой $\|(tI + B_\eta)^{-1} - (tI + B)^{-1}\| \leqslant t^{-1}$, а на $(\eta^2, 1)$ и $(1, \infty)$ соответственно оценками

$$\|(tI + B_\eta)^{-1} - (tI + B)^{-1}\| \leqslant \begin{cases} t^{-3/2}\eta, \\ (\|A_\eta\| + \|A\|)\, t^{-2} \eta, \end{cases}$$

вытекающими из равенства

$$(tI + B_\eta)^{-1} - (tI + B)^{-1} = (tI + B_\eta)^{-1} [A_\eta^* (A - A_\eta) + {}$$
$$+ (A^* - A_\eta^*) A] (tI + B)^{-1} \tag{1.11}$$

и неравенств $\|(tI + A_\eta^* A_\eta)^{-1} A_\eta^*\| \leqslant \frac{1}{2} t^{-1/2}$, $\|A (tI + A^*A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{2} t^{-1/2}$. В результате при $\alpha \neq 1/2$ получаем

$$\| B_\eta^\alpha - B^\alpha \| \leqslant \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left[\frac{\eta^{2\alpha}}{\alpha} + 2\eta \frac{1 - \eta^{2\alpha-1}}{2\alpha - 1} + (\|A_\eta\| + \|A\|) \frac{\eta}{1 - \alpha} \right]. \tag{1.12}$$

Поскольку $(1 - \eta^\beta)\beta^{-1} \leqslant |\ln \eta|$ $(0 < \beta < 1)$, то $\eta (1 - \eta^{2\alpha-1}) \times$

$\times(2\alpha-1)^{-1} \leqslant \eta|\ln\eta|$ при $\alpha > 1/2$ и $\eta(1-\eta^{2\alpha-1})(2\alpha-1)^{-1} = \eta^{2\alpha}(1-\eta^{1-2\alpha})(1-2\alpha)^{-1} \leqslant \eta^{2\alpha}|\ln\eta|$ при $\alpha < 1/2$; при $\alpha = 1/2$ множитель $|\ln\eta|$ появляется при интегрировании непосредственно. Итак,

$$\|B_\eta^\alpha - B^\alpha\| \leqslant \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{\eta^{2\alpha}}{\alpha} + 2|\ln\eta|\,\eta^{\min\{1,2\alpha\}} + (\|A_\eta\| + \|A\|)\frac{\eta}{1-\alpha}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \eta^{2\alpha} + \frac{2}{\pi}|\ln\eta|\,\eta^{\min\{1,2\alpha\}} + (\|A_\eta\| + \|A\|)\,\eta \quad (0 < \alpha < 1), \tag{1.13}$$

и оценка (1.8) в случае $p = \alpha \in (0, 1)$ установлена.

Рассмотрим, наконец, случай $p = k + \alpha$, где $k \geqslant 1$ — целое, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда $B_\eta{}^p - B^p = B_\eta{}^k(B_\eta{}^\alpha - B^\alpha) + (B_\eta{}^k - B^k)B^\alpha$. Второй член в правой части оценим на основании (1.9). В оценке нуждается первый член (см. (1.10))

$$B_\eta^k(B_\eta^\alpha - B^\alpha) = -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_0^\infty t^\alpha B_\eta^k\left[(tI + B_\eta)^{-1} - (tI + B)^{-1}\right]dt.$$

Поскольку $\|B_\eta(tI + B_\eta)^{-1}\| \leqslant 1$, то из (1.11) следует

$$\|B_\eta^k[(tI + B_\eta)^{-1} - (tI + B)^{-1}]\| \leqslant \begin{cases} \|B_\eta\|^{k-1}(\|A_\eta\| + \|A\|)\,t^{-1}\eta, \\ \|B_\eta\|^k(\|A_\eta\| + \|A\|)\,t^{-2}\eta. \end{cases}$$

Первой оценкой воспользуемся на $(0, 1)$, второй — на $(1, \infty)$. В результате получим уточнение оценки (1.8):

$$\|B_\eta{}^p - B^p\| \leqslant c_p'\eta \quad (p \geqslant 1). \tag{1.14}$$

Тем самым завершено доказательство оценки (1.6).

Перейдем к доказательству оценки (1.7). Она равносильна оценке

$$\|B_\eta^{1/2}K_{r\eta}(B_\eta^p - B^p)\| \leqslant \varepsilon_{rp}'\eta, \quad \varepsilon_{rp}' \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{1.15}$$

которую мы и докажем. Для простоты будем считать, что условие (0.5) выполнено с $p_0 \geqslant 1/2$. При $p \geqslant 1$ оценка (1.15) немедленно вытекает из (0.5) и (1.14), причем $\varepsilon'_{rp} = c_p'\gamma_{1/2}r^{-1/2}$. При $p = \alpha \in (0, 1)$ на основании (1.10) и (1.11) имеем

$$B_\eta^{1/2}K_{r\eta}(B_\eta^\alpha - B^\alpha) =$$
$$= -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_0^\infty t^\alpha B_\eta^{1/2}K_{r\eta}(tI + B_\eta)^{-1}A_\eta^*(A - A_\eta)(tI + B)^{-1}dt -$$
$$-\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_0^\infty t^\alpha B_\eta^{1/2}K_{r\eta}(tI + B_\eta)^{-1}(A^* - A_\eta^*)A(tI + B)^{-1}dt.$$

Ввиду полярных разложений $A_\eta = U_\eta B_\eta{}^{1/2}$, $A = UB^{1/2}$ $(\|U_\eta\| =$

$=\|U\|=1$) получаем неравенство

$$\|B_\eta^{1/2}K_{r\eta}(B_\eta^\alpha-B^\alpha)\|\leqslant\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left\{\int\limits_0^\infty t^\alpha\|B_\eta K_{r\eta}(tI+B_\eta)^{-1}\|t^{-1}\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^\infty t^\alpha\|B_\eta^{1/2}K_{r\eta}(tI+B_\eta)^{-1}\|\|B^{1/2}(tI+B)^{-1}\|dt\right\}\eta.$$

Пусть $\beta\in(0,\alpha)$, $\beta\leqslant1/2$. Учитывая, что $\|B_\eta^\sigma(tI+B_\eta)^{-1}\|\leqslant t^{\sigma-1}$ ($t>0$; $0\leqslant\sigma\leqslant1$), при помощи (0.5) оценим подынтегральные нормы

$$\|B_\eta K_{r\eta}(tI+B_\eta)^{-1}\|\leqslant\begin{cases}\gamma_\beta r^{-\beta}t^{-\beta},\\ \gamma_{1/2}r^{-1/2}\|A_\eta\|t^{-1},\end{cases}$$

$$\|B_\eta^{1/2}K_{r\eta}(tI+B_\eta)^{-1}\|\leqslant\begin{cases}\gamma_\beta r^{-\beta}t^{-\beta-\frac{1}{2}},\\ \gamma_{1/2}r^{-1/2}t^{-1},\end{cases}\quad\|B^{1/2}(tI+B)^{-1}\|\leqslant\begin{cases}t^{-1/2},\\ \|A\|t^{-1}.\end{cases}$$

Верхние варианты этих оценок используем на (0, 1), нижние — на (1, ∞). В результате приходим к оценке (1.15) с

$$\varepsilon'_{r\alpha}=2\frac{\sin\alpha\pi}{(\alpha-\beta)\pi}\gamma_\beta r^{-\beta}+(\|A_\eta\|+\|A\|)\gamma_{1/2}r^{-1/2}.$$

В частности, полагая $\beta=\alpha/2$, получаем

$$\varepsilon'_{r\alpha}=4\gamma_{\alpha/2}r^{-\alpha/2}+(\|A_\eta\|+\|A\|)\gamma_{1/2}r^{-1/2}. \tag{1.16}$$

Лемма 1.2 доказана.

Как видно из доказательства (см. (1.12), (1.14)), при $p\neq1$ в оценке (1.6) можно убрать множитель $1+|\ln\eta|$, но в таком случае коэффициент c_p в (1.6) будет иметь особенность в точке $p=1$. Т. Като установил оценку [87]

$$\||A_\eta|-|A|\|\leqslant\frac{2}{\pi}\left(2+\ln\frac{\|A_\eta\|+\|A\|}{\eta}\right)\eta \tag{1.17}$$

и показал, что в общем случае оценка вида $\||A_\eta|-|A|\|\leqslant c\eta$ неверна.

Оценку (1.17) можно легко получить из (1.13) при $\alpha=1/2$: $\||A_\eta|-|A|\|\leqslant(2/\pi)(1-\ln\eta+\|A_\eta\|+\|A\|)\eta$. Напишем это неравенство для операторов λA_η и λA, где λ — положительный параметр: $\lambda\||A_\eta|-|A|\|\leqslant(2/\pi)[1-\ln(\lambda\eta)+\lambda(\|A_\eta\|+\|A\|)]\lambda\eta$. Разделив на λ и минимизируя правую часть по λ, приходим к (1.17).

Условие (0.5) в леммах 1.1 и 1.2 использовалось лишь при выводе оценок (1.3) и (1.7). Эти оценки сохраняют силу и при замене (0.5) более слабым набором условий (0.6), (0.7).

1.4. Случай самосопряженных знакопеременных операторов. Аналогично леммам 1.1 и 1.2 доказывается

Лемма 1.3. Пусть $A=A^*$, $A_\eta=A_\eta^*$, $\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$. Тогда при $p\geqslant0$ справедлива оценка (1.6). Если $\sigma(A)\subseteq[-a_0,\ a]$, $\sigma(A_\eta)\subseteq$

$\subseteq[-a_0, a]$ и выполнено условие (0.9), то при $p>0$ справедлива оценка

$$\|A_\eta G_{r\eta}(|A_\eta|^p-|A|^p)\|\leqslant \varepsilon_{rp}\eta, \quad \varepsilon_{rp}\to 0 \text{ при } r\to\infty. \tag{1.18}$$

1.5. **Случай неограниченных операторов.** Следующие две леммы доказываются по той же схеме, что и леммы 1.1 и 1.2.

Лемма 1.4. Пусть A и A_η — самосопряженные неотрицательные операторы, $\mathscr{D}(A_\eta)\supseteq\mathscr{D}(A)$ и

$$\|A_\eta u-Au\|\leqslant\eta(\|u\|+\|Au\|) \quad \forall u\in\mathscr{D}(A)\subseteq H. \tag{1.19}$$

Пусть условие (0.5) выполнено с $a=\infty$. Тогда

$$\begin{gathered}\|G_{r\eta}(A_\eta^p-A^p)u\|\leqslant c_p\eta^{\min\{1,p\}}(\|u\|+\|A^pu\|)\\ \forall u\in\mathscr{D}(A^p), \quad 0\leqslant p\leqslant p_0;\end{gathered} \tag{1.20}$$

если в (0.5) $p_0>1$, то

$$\begin{gathered}\|A_\eta G_{r\eta}(A_\eta^p-A^p)u\|\leqslant\varepsilon_{rp}\eta(\|u\|+\|A^pu\|)\\ \forall u\in\mathscr{D}(A^p), \quad 0\leqslant p\leqslant p_0-1,\end{gathered} \tag{1.21}$$

где постоянные c_p и ε_{rp} не зависят от u, η, A, A_η, причем c_p не зависит также от r, а $\varepsilon_{rp}\to 0$ при $r\to\infty$.

Близкие утверждения с порчей оценки (1.20) множителем $1+|\ln\eta|$ справедливы в случае самосопряженных операторов без условия их неотрицательности, если вместо (0.5) выполнено (0.9) с $a_0=a=\infty$.

Лемма 1.5. Пусть A и A_η — плотно определенные линейные замкнутые операторы из H в F, такие, что $\mathscr{D}(A_\eta)\supseteq\mathscr{D}(A)$ и

$$\|A_\eta u-Au\|\leqslant\eta(\|u\|+\|Au\|) \qquad \forall u\in\mathscr{D}(A)\subseteq H. \tag{1.22}$$

Пусть условие (0.5) выполнено с $a=\infty$. Тогда

$$\begin{gathered}\|K_{r\eta}(|A_\eta|^p-|A|^p)u\|\leqslant c_p(1+|\ln\eta|)\eta^{\min\{1,p\}}(\|u\|+\||A|^pu\|)\\ \forall u\in\mathscr{D}(|A|^p), \quad 0\leqslant p\leqslant 2p_0;\end{gathered} \tag{1.23}$$

если в (0.5) $p_0>1/2$, то

$$\begin{gathered}\|A_\eta K_{r\eta}(|A_\eta|^p-|A|^p)u\|\leqslant\varepsilon_{rp}\eta(\|u\|+\||A|^pu\|)\\ \forall u\in\mathscr{D}(|A|^p), \quad 0\leqslant p\leqslant 2p_0-1;\end{gathered} \tag{1.24}$$

если $p_0>1$, то

$$\begin{gathered}\|A_\eta^*A_\eta K_{r\eta}(|A_\eta|^p-|A|^p)u\|\leqslant\varepsilon'_{rp}\eta(\|u\|+\||A|^pu\|)\\ \forall u\in\mathscr{D}(|A|^p), \quad 0\leqslant p\leqslant 2(p_0-1),\end{gathered} \tag{1.25}$$

где $c_p=\mathrm{const}$, $\varepsilon_{rp}\to 0$, $\varepsilon'_{rp}\to 0$ при $r\to\infty$; их характер таков же, как в лемме 1.4.

Обозначения $G_{r\eta}$ и $K_{r\eta}$ те же, что и в леммах 1.1 и 1.2.

Сделаем некоторые поясняющие замечания в связи с областями определения операторов в (1.19)—(1.25). Из (1.22) при $\eta<1$ следует (см. [44]), что $\mathscr{D}(A_\eta)=\mathscr{D}(A)$. В (1.23)—(1.25) операторы $K_{r\eta}|A_\eta|^p$, $A_\eta K_{r\eta}|A_\eta|^p$, $A_\eta^* A_\eta K_{r\eta}|A_\eta|^p$ при соответствующих p в силу (0.5) ограничены и их можно считать расширенными по непрерывности на все пространство H; ограничены и операторы $K_{r\eta}$, $A_\eta K_{r\eta}$, $A_\eta^* A_\eta K_{r\eta}$, и проблем с областями определения не возникает.

2. Априорный выбор параметра регуляризации

2.1. **Случай самосопряженной задачи.** Рассмотрим ситуацию, когда оператор $A=A^*$ может быть знакопеременным.

Теорема 2.1. Пусть $H=F$, $A=A^*$, $A_\eta=A_\eta^*$, $\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$, $\sigma(A_\eta)\subseteq[-a_0, a]$ $(0<\eta\leqslant\eta_0)$, $f\in\mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$ и выполнены условия (0.8) и (0.10), (0.11). Выберем параметр $r=r(\delta, \eta)$ в приближении (0.2) таким образом, что

$$r(\delta, \eta)\to\infty, \quad (\delta+\eta)r(\delta, \eta)\to0 \quad \text{при } \delta\to0,\ \eta\to0. \tag{2.1}$$

Тогда $u_{r(\delta,\eta)}\to u_*$ при $\delta\to0$, $\eta\to0$.

Если начальная погрешность представима в виде

$$u_0-u_*=|A|^p v,\ p>0,\ \|v\|\leqslant\rho \tag{2.2}$$

и выполнены условия (0.8) и (0.9), то при выборе

$$r=d(\delta+\eta)^{-1/(p+1)}, \qquad d=\text{const}>0 \tag{2.3}$$

справедлива оценка

$$\|u_r-u_*\|\leqslant c_{p\rho d}(\delta+\eta)^{p/(p+1)},\ 0<p\leqslant p_0. \tag{2.4}$$

Установим сперва некоторое обобщение леммы 5.1 гл. II.

Лемма 2.1. Пусть $A=A^*$, $A_\eta=A_\eta^*$, $\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$, $\sigma(A_\eta)\in\in[-a_0, a]$ и выполнены условия (0.10) и (0.11). Тогда

$$\|G_{r\eta}v\|\to0 \text{ при } r\to\infty,\ \eta\to0\ \forall v\in\mathscr{N}(A)^\perp=\overline{\mathscr{R}(A)}. \tag{2.5}$$

Доказательство вытекает из следующих замечаний: в силу (0.10) $\|G_{r\eta}\|\leqslant\gamma_0$ $(r>0,\ 0<\eta\leqslant\eta_0)$; для элементов вида $u=Aw$, образующих в $\overline{\mathscr{R}(A)}$ плотное подмножество, на основании (0.11) имеем

$$\|G_{r\eta}v\|=\|G_{r\eta}Aw\|\leqslant\|G_{r\eta}(A-A_\eta)w\|+\|G_{r\eta}A_\eta w\|\leqslant$$
$$\leqslant(\gamma_0\eta+\sup_{-a_0\leqslant\lambda\leqslant a}|\lambda||1-\lambda g_r(\lambda)|)\|w\|\to0 \text{ при } r\to\infty,\ \eta\to0.$$

Лемма 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Из (0.2) получаем

$$u_r-u_*=G_{r\eta}(u_0-u_*)+g_r(A_\eta)(f_\delta-A_\eta u_*). \tag{2.6}$$

Поскольку по условию (0.8) $\|g_r(A_\eta)\|\leqslant\sup\limits_{-a_0\leqslant\lambda\leqslant a}|g_r(\lambda)|\leqslant\gamma r$, а

$\|f_\delta - A_\eta u_*\| \leqslant \delta + \|u_*\|\eta$, то

$$\|g_r(A_\eta)(f_\delta - A_\eta u_*)\| \leqslant \gamma r(\delta + \|u_*\|\eta). \tag{2.7}$$

Из (2.5)—(2.7) и (2.1) вытекает $\|u_{r(\delta,\eta)} - u_*\| \to 0$, $\delta \to 0$, $\eta \to 0$.

В случае начальной погрешности (2.2) в силу (0.9) и леммы 1.3

$$\|G_{r\eta}(u_0 - u_*)\| = \|G_{r\eta}|A|^p v\| \leqslant \|G_{r\eta}(|A|^p - |A_\eta|^p)v\| + \\ + \|G_{r\eta}|A_\eta|^p v\| \leqslant \gamma_0 c_p (1 + |\ln\eta|)\eta^{\min\{1,p\}}\rho + \gamma_p r^{-p}\rho,$$

что совместно с (2.6) и (2.7) дает оценку

$$\|u_r - u_*\| \leqslant \gamma_0 c_p (1 + |\ln\eta|)\eta^{\min\{1,p\}}\rho + \gamma_p r^{-r}\rho + \gamma r(\delta + \|u_*\|\eta). \tag{2.8}$$

При r, указанном в (2.3), получаем (2.4). Теорема 2.1 доказана.

Минимизируя правую часть (2.8) по r, приходим к следующей рекомендации выбора r в случае начальной погрешности (2.2):

$$r = d_p \rho^{1/(p+1)}(\delta + \|u_*\|\eta)^{-1/(p+1)}, \qquad d_p = (p\gamma_p/\gamma)^{1/(p+1)}; \tag{2.9}$$

такому r соответствует оценка

$$\|u_r - u_*\| \leqslant \gamma_0 c_p (1 + |\ln\eta|)\eta^{\min\{1,p\}}\rho + c'_p \rho^{1/(p+1)}(\delta + \|u_*\|\eta)^{p/(p+1)}, \\ c'_p = (p^{1/(p+1)} + p^{-p/(p+1)})\gamma^{p/(p+1)}\gamma_p^{1/(p+1)}. \tag{2.10}$$

Теорема 2.1 сохраняет силу и в случае, когда A и A_η—такие неограниченные самосопряженные операторы, что $\mathscr{D}(A_\eta) \supseteq \mathscr{D}(A)$ и $\|A_\eta u - Au\| \leqslant \eta(\|u\| + \|Au\|)$, $u \in \mathscr{D}(A)$ (последнее — вместо условия $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$; условия (0.8), (0.9) и т. д. должны выполняться на $(-\infty, \infty)$, т. е. $a_0 = a = \infty$).

В случае $A = A^* \geqslant 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geqslant 0$ теорема сходимости формулируется вполне аналогично теореме 2.1, лишь условия (0.8)—(0.11) заменяются соответственно на (0.4)—(0.7). Кроме того, привлечение леммы 1.1 позволяет избавиться от множителя $1 + |\ln\eta|$ в первом члене оценки (2.10); напомним также, что $c_p \leqslant 2$ при $0 \leqslant p \leqslant 1$. Представляет еще интерес случай, когда $A = A^* \geqslant 0$, но операторы $A_\eta = A_\eta^*$ не обязательно неотрицательны:

Теорема 2.2. Пусть $H = F$, $A = A^* \geqslant 0$, $A_\eta = A_\eta^*$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$, $\|A_\eta\| \leqslant a$ $(0 < \eta \leqslant \eta_0)$, $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ и выполнены условия (0.4), (0.5) и (0.12). Выберем $r = r(\delta, \eta)$ в приближении (0.2) так, что выполнено (2.1). Тогда $u_{r(\delta,\eta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$. Если начальная погрешность представима в виде (2.2), то при выборе (2.3) параметра r справедлива оценка (2.4).

Доказательство отличается от приведенного незначительными деталями: с учетом (0.12) (см. также (0.13)) имеем

$$\|G_{r\eta}\| \leqslant \max\{\gamma_0, \gamma_0^-\}, \ \|g_r(A_\eta)\| \leqslant r\max\{\gamma, \gamma^-\},$$

$$\||A_\eta|^p G_{r\eta}\| \leqslant r^{-p}\max\{\gamma_p, \gamma_p^-\}, \quad 0 < r \leqslant \alpha\eta^{-1}.$$

2.2. Случай несамосопряженной задачи. Из леммы 2.1 следует

Лемма 2.2. Пусть A, $A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$, $\|A_\eta\|^2 \leqslant a$ и выполнены условия (0.6) и (0.7). Тогда

$$\|K_{r\eta} v\| \to 0 \quad \text{при } r \to \infty, \eta \to 0 \qquad \forall v \in \mathscr{N}(A)^\perp = \overline{\mathscr{R}(A^*)}, \tag{2.11}$$

$$\|\widetilde{K}_{r\eta} z\| \to 0 \quad \text{при } r \to \infty, \eta \to 0 \qquad \forall z \in \mathscr{N}(A^*)^\perp = \overline{\mathscr{R}(A)}, \tag{2.12}$$

где

$$K_{r\eta} = I - A_\eta^* A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta), \qquad \widetilde{K}_{r\eta} = I - A_\eta A_\eta^* g_r(A_\eta A_\eta^*). \tag{2.13}$$

Теорема 2.3. Пусть A, $A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$, $\|A_\eta\|^2 \leqslant a$ $(0 < \eta \leqslant \eta_0)$, $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ и выполнены условия (0.4) и (0.6), (0.7). Выберем параметр $r = r(\delta, \eta)$ в приближении (0.3) так, что

$$r(\delta, \eta) \to \infty, \ (\delta + \eta)^2 r(\delta, \eta) \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0, \ \eta \to 0. \tag{2.14}$$

Тогда $u_{r(\delta,\eta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$.

Если начальная погрешность представима в виде

$$u_0 - u_* = |A|^p v, \ p > 0, \ \|v\| \leqslant \rho \tag{2.15}$$

и выполнены условия (0.4) и (0.5), то при выборе

$$r = d(\delta + \eta)^{-2/(p+1)}, \quad d = \text{const} > 0 \tag{2.16}$$

справедлива оценка

$$\|u_r - u_*\| \leqslant c_{p\rho d}(\delta + \eta)^{p/(p+1)}, \quad 0 < p \leqslant 2p_0. \tag{2.17}$$

Доказательство. Для погрешности приближения (0.3) имеем

$$u_r - u_* = K_{r\eta}(u_0 - u_*) + g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u_*) \tag{2.18}$$

(см. обозначения (2.13)). Здесь (ср. с п. 1.3 гл. III) $\|g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^*\| \leqslant \gamma_* r^{1/2}$ и

$$\|g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u_*)\| \leqslant \gamma_* r^{1/2} (\delta + \|u_*\| \eta). \tag{2.19}$$

Из (2.18), (2.19), (2.11) и (2.14) следует сходимость $\|u_{r(\delta,\eta)} - u_*\| \to 0$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$.

В случае начальной погрешности (2.15) при помощи (0.5) и леммы 1.2 находим

$$\begin{aligned} \|K_{r\eta}(u_0 - u_*)\| = \|K_{r\eta} |A|^p v\| \leqslant \|K_{r\eta}(|A_\eta|^p - |A|^p) v\| + \\ + \|K_{r\eta} |A_\eta|^p v\| \leqslant \gamma_0 c_p (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min\{1,p\}} \rho + \gamma_{p/2} r^{-p/2} \rho \end{aligned}$$

и далее

$$\begin{aligned} \|u_r - u_*\| \leqslant \gamma_0 c_p (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min\{1,p\}} \rho + \gamma_{p/2} r^{-p/2} \rho + \\ + \gamma_* r^{1/2} (\delta + \|u_*\| \eta), \quad 0 < p \leqslant 2p_0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Выбирая здесь r по (2.16), получаем оценку (2.17). Теорема 2.3 доказана.

Минимизируя правую часть (2.20) по r, приходим к следующей рекомендации выбора r в случае начальной погрешности (2.15):

$$r = d_p\rho^{2/(p+1)}(\delta + \|u_*\|\,\eta)^{-2/(p+1)}, \qquad d_p = (p\gamma_{p/2}/\gamma_*)^{2/(p+1)}; \tag{2.21}$$

такому выбору r соответствует оценка

$$\|u_r - u_*\| \leqslant \gamma_0 c_p (1 + |\ln\eta|)\,\eta^{\min\{1,p\}}\rho + \\ + c'_p\rho^{1\,(p+1)}(\delta + \|u_*\|\,\eta)^{p/(p+1)}, \quad 0 < p \leqslant 2p_0, \tag{2.22}$$

$$c'_p = (p^{1/(p+1)} + p^{-p/(p+1)})\,\gamma_{*}^{p/(p+1)}\gamma_{p/2}^{1/(p+1)}.$$

Как отмечалось в конце п. 1.3, множитель $1+|\ln\eta|$ при $p\neq 1$ можно из оценки (1.6), а значит, и из оценки (2.22) убрать (но тогда коэффициент c_p будет иметь особенность в точке $p=1$). Для $p=1$ этот множитель тоже удается из (2.22) убрать. Именно, условие (2.15) при $p=1$ равносильно условию

$$u_0 - u_* = A^*z, \quad \|z\| \leqslant \rho, \tag{2.23}$$

тогда

$$\|K_{r\eta}(u_0 - u_*)\| = \|K_{r\eta}A^*z\| \leqslant \|K_{r\eta}(A^* - A^*_\eta)z\| + \|K_{r\eta}A^*_\eta z\| \leqslant \\ \leqslant (\gamma_0\eta + \gamma_{1/2}r^{-1/2})\,\rho.$$

Рекомендация выбора r в случае начальной погрешности (2.23) (или (2.15) с $p=1$) приобретает форму

$$r = \gamma_{1/2}\gamma_*^{-1}\rho(\delta + \|u_*\|\eta)^{-1} \tag{2.24}$$

и дает оценку

$$\|u_r - u_*\| \leqslant \gamma_0\rho\eta + 2(\gamma_*\gamma_{1/2})^{1/2}\rho^{1/2}(\delta + \|u_*\|\eta)^{1/2}. \tag{2.25}$$

Если уравнение (0.1) разрешимо лишь в смысле наименьших квадратов, то по сравнению с теоремой 2.3 результаты ослабляются:

Теорема 2.4. Пусть A, $A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$, $\|A_\eta\|^2 \leqslant a$ $(0 < \eta \leqslant \eta_0)$, $Qf \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ и выполнены условия (0.4) и (0.6), (0.7). Если в приближении (0.3) выбрать $r = r(\delta, \eta)$ так, что

$$r(\delta, \eta) \to \infty, \quad (\delta^2 + \eta)\,r(\delta, \eta) \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0,\ \eta \to 0, \tag{2.26}$$

то $u_{r(\delta,\eta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$.

Если начальная погрешность представима в виде (2.15) и выполнены условия (0.4) и (0.5), то при выборе

$$r = d(\delta + \eta)^{-2/(p+2)}, \qquad d = \text{const} > 0 \tag{2.27}$$

справедлива оценка

$$\|u_r - u_*\| \leqslant c_{p\rho d}(\delta + \eta)^{p/(p+2)}, \qquad 0 < p \leqslant 2p_0. \tag{2.28}$$

Доказательство. Надо заново оценить второй член в правой части равенства (2.18). Имеем $f_\delta - A_\eta u_* = (f_\delta - f) - (A_\eta - A)u_* + (f - Qf)$. Поскольку $A^*(I - Q) = 0$, то

$\|A_\eta^*(f-Qf)\| = \|(A_\eta^*-A^*)(f-Qf)\| \leqslant \eta\|f-Qf\|$, и вместо (2.19) получаем

$$\|g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u_*)\| \leqslant \gamma_* r^{1/2} (\delta + \|u_*\| \eta) + \gamma r \eta \|f - Qf\|. \quad (2.29)$$

В остальном повторяем рассуждения доказательства предыдущей теоремы. Теорема 2.4 доказана.

Теоремы 2.3 и 2.4 сохраняют силу и в случае плотно определенных неограниченных замкнутых операторов A и A_η, таких, что $\mathscr{D}(A_\eta) \supseteq \mathscr{D}(A)$ и $\|A_\eta u - Au\| \leqslant \eta(\|u\| + \|Au\|)$ $\forall u \in \mathscr{D}(A)$; условия (0.4), (0.5) и т. д. должны выполняться на $[0, \infty)$, т. е. $a = \infty$.

2.3. **Обсуждение.** Утверждение теоремы 2.1, касающееся сходимости приближений u_r, можно трактовать так: метод (0.2) с выбором параметра в соответствии с (2.1) является $\mathfrak{A}$-регуляризатором, где $\mathfrak{A} \subset \mathscr{L}(H, H)$ — множество самосопряженных операторов. Оценка (2.4) свидетельствует о том, что метод $\{(0.2), (2.3)\}$ $\mathfrak{A}$-оптимален по порядку на множестве

$$\mathscr{M}_{p\rho u_0} = \{u \in H\colon\ u - u_0 = |A|^p v,\ \|v\| \leqslant \rho\},\ 0 < p \leqslant p_0,\ \rho > 0.$$

Действительно, ввиду производительности f, f_δ и A_η этой оценке можно придать вид

$$\sup_{\substack{u \in \mathscr{M}_{p\rho u_0}, f_\delta \in F, A_\eta \in \mathfrak{A} \\ \|A_\eta - A\| \leqslant \eta, \|A_\eta u - f_\delta\| \leqslant \delta + b\eta}} \|u_{r(\delta,\eta)} - u\| \leqslant c'_{p\rho d} (\delta + \eta)^{p/(p+1)},$$

где

$$b = b_{p\rho u_0} = \sup_{u \in \mathscr{M}_{p\rho u_0}} \|u\| = \|u_0\| + b_{p\rho}, \qquad b_{p\rho} = \sup_{u \in \mathscr{M}_{p\rho}} \|u\| = \|A\|^p \rho.$$

С другой стороны, для любого $\mathscr{Q}$: $F \times \mathfrak{A} \to H$ имеем (см. неравенство (4.9) гл. I)

$$\sup_{\substack{u \in \mathscr{M}_{p\rho u_0}, f_\delta \in F, A_\eta \in \mathfrak{A} \\ \|A_\eta - A\| \leqslant \eta, \|A_\eta u - f_\delta\| \leqslant \delta + b\eta}} \|\mathscr{Q}(f_\delta, A_\eta) - u\| \geqslant \rho^{1/(p+1)} (\delta + b_{p\rho}\eta)^{p/(p+1)} \quad (2.30)$$

Сопоставление этих двух неравенств и говорит о том, что метод (0.2), (2.3) $\mathfrak{A}$-оптимален по порядку на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$.

Аналогичную трактовку можно придать и теоремам 2.2—2.4. В частности, в условиях теоремы 2.3 мы имеем дело с $\mathscr{L}(H, F)$-регуляризатором $\{(0.3), (2.14)\}$, причем метод $\{(0.3), (2.16)\}$ $\mathscr{L}(H, F)$-оптимален по порядку на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$, $0 < p \leqslant 2p_0$. В условиях теоремы 2.4 тоже имеем $\mathscr{L}(H, F)$-регуляризатор (0.3), (2.26), но метод (0.3), (2.27) — неоптимального порядка. Интерес эта теорема представляет главным образом по той причине, что сходимость получена в ситуации, когда уравнение (0.1) разрешимо лишь в смысле наименьших квадратов.

2.4. **Асимптотическая оптимальность.** Обсудим вопрос о возможности выбора параметра $r = r(\delta, \eta, \mathscr{M}_{p\rho})$ в приближениях

(0.2) и (0.3) с целью получить асимптотически оптимальные методы на множестве,

$$\mathscr{M}_{p\rho}=\mathscr{M}_{p\rho 0}=\{u\in H\colon u=|A|^{p}v,\ \|v\|\leqslant\rho\},\quad p>0,\ \rho>0.$$

Будем считать, что в приближениях (0.2) и (0.3) $u_0=0$. Для любого $u\in\mathscr{M}_{p\rho}$ и приближения (0.3) с любыми $f_\delta\in F$ и $A_\eta\in\mathscr{L}(H,F)$ такими, что $\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$, $\|A_\eta u-f_\delta\|\leqslant\delta+b_{p\rho}\eta$ $(b_{p\rho}=\|A\|^{p}\rho)$, имеем (ср. с (2.18)) $u_\eta-u=w_r{}^1+w_r{}^2$, где

$$w_r^1=K_{r\eta}\left(|A|^{p}-|A_\eta\|^{p}\right)v,\qquad u=-|A|^{p}v,\ \|v\|\leqslant\rho,$$
$$w_r^2=\left(\mathrm{I}-A_\eta^{*}A_\eta g_r\left(A_\eta^{*}A_\eta\right)\right)|A_\eta|^{p}v+g_r\left(A_\eta^{*}A_\eta\right)A_\eta^{*}\left(f_\delta-A_\eta u\right).$$

Величина $\|w_r{}^1\|$ оценивается на основе леммы 1.2 и дает в $\|u_r-u\|$ вклад $o(\eta^{p/(p+1)})$. Величина $\|w_r{}^2\|$ подробно изучена в разд. 2 гл. III с той разницей, что там вместо A_η мы имели дело с оператором A, а вместо $\|f_\delta-A_\eta u\|\leqslant\delta+b_{p\rho}\eta$ имели $\|f_\delta-Au\|\leqslant\delta$; обозначим

$$v_r=(I-A^{*}Ag_r(A^{*}A))|A|^{p}v+g_r(A^{*}A)A^{*}(f_\delta-Au).$$

Теорема 2.4 гл. III дает необходимые и достаточные условия для справедливости оценки $\|v_{r(\delta)}\|\leqslant\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}$; для итерационных методов в п. 2.8 гл. III указаны условия справедливости асимптотического аналога этой оценки. Для $w_r{}^2$ в соответствующих случаях получаем оценку $\|w^2_{r(\delta+b_{p\rho}\eta)}\|\leqslant\rho^{1/(p+1)}(\delta+b_{p\rho}\eta)^{p/(p+1)}$ или ее асимптотический аналог, и в результате

$$\varlimsup_{\delta\to 0,\eta\to 0}\frac{\sup\limits_{\substack{u\in\mathscr{M}_{p\rho},f_\delta\in F,A_\eta\in\mathscr{L}(H,F)\\ \|A_\eta-A\|\leqslant\eta,\|A_\eta u-f_\delta\|\leqslant\delta+b_{p\rho}\eta}}\|u_{r(\delta+b_{p\rho}\eta)}-u\|}{\rho^{1/(p+1)}(\delta+b_{p\rho}\eta)^{p/(p+1)}}\leqslant 1.$$

В силу неравенства (2.30) это означает, что мы имеем дело с асимптотически $\mathscr{L}(H,\ F)$- оптимальным методом. Аналогичные рассуждения можно провести для приближения (0.2) и установить условия асимптотической $\mathfrak{A}^{+}$-оптимальности; здесь $\mathfrak{A}^{+}$ — множество самосопряженных неотрицательных операторов.

Конкретизируем результаты для методов, рассмотренных в пп. 2.6—2.8 гл. III. Метод М. М. Лаврентьева $u_\alpha=(\alpha I+A_\eta)^{-1}f_\delta$ с выбором параметра $\alpha=p^{-1}\rho^{-1/(p+1)}(\delta+b_{p\rho}\eta)^{1/(p+1)}$ асимптотически $\mathfrak{A}^{+}$-оптимален на $\mathscr{M}_{p\rho}$ при $0<p\leqslant{}^1/_2(\sqrt{5}-1)\approx 0{,}618$; при этом

$$\sup_{\substack{u\in\mathscr{M}_{p\rho},f_\delta\in F,A_\eta\in\mathfrak{A}^{+}\\ \|A_\eta-A\|\leqslant\eta,\|A_\eta u-f_\delta\|\leqslant\delta+b_{p\rho}\eta}}\|u_\alpha-u\|\leqslant 2\eta^{p}\rho+\rho^{1/(p+1)}(\delta+b_{p\rho}\eta)^{p/(p+1)}.$$

Непрерывный аналог итерационных методов $u'(t)+A_\eta u(t)=f_\delta$, $u(0)=0$, с выбором момента останова $t=\ln(1+p)\rho^{1/(p+1)}\times(\delta+b_{p\rho}\eta)^{-1/(p+1)}$ асимптотически $\mathfrak{A}^{+}$-оптимален на $\mathscr{M}_{p\rho}$ при $0<p\leqslant p_1\approx 1{,}043$.

Итерационные методы

$$u_0=0,\ u_n=u_{n-1}-g(A_\eta)(A_\eta u_{n-1}-f_\delta),\ n=1,\ 2,\ \ldots$$

с функциями g: $[0, a] \to R$, подчиненными условиям леммы 4.1 гл. II, и остановом на

$$n = \operatorname{int}\{\ln(1+p)\,[g(0)^{-1}\rho^{1/(p+1)}(\delta + b_{p\rho}\eta)^{-1/(p+1)}\}$$

асимптотически $\mathfrak{A}^+$-оптимальны на $\mathcal{M}_{p\rho}$ при тех же $p \in (0, p_1]$.

Метод спектральной срезки (ср. с п. 1.5 гл. III)

$$u_\alpha = A_\eta^{-1}[I - P_\eta(\alpha)]\,f_\delta + \alpha^{-1}P_\eta(\alpha)\,f_\delta,$$
$$\alpha = (p+1)\,p^{-1}\rho^{-1/(p+1)}(\delta + b_{p\rho}\eta)^{1/(p+1)}$$

асимптотически $\mathfrak{A}^+$-оптимален на $\mathcal{M}_{p\rho}$ при любом $p \in (0, \infty)$. Здесь $P_\eta(\lambda)$ — спектральное семейство проекторов оператора $A_\eta = A_\eta^* \geqslant 0$. Метод

$$u_\alpha = A_\eta^{-1}[I - \Pi_\eta(\alpha)]\,f_\delta + \alpha^{-1}\Pi_\eta(\alpha)\,f_\delta,$$
$$\alpha = (p+1)\,p^{-1}\rho^{-1/(p+1)}(\delta + b_{p\rho}\eta)^{1\ (p+1))},$$
$$\Pi_\eta(\alpha) = P_\eta(\alpha) - P_\eta(-\alpha)$$

асимптотически $\mathfrak{A}$-оптимален на $\mathcal{M}_{p\rho}$ при $0 < p < \infty$, где $\mathfrak{A} \subset \mathcal{L}(H, H)$ — класс самосопряженных операторов без условия неотрицательности.

Метод А. Н. Тихонова $u_\alpha = (\alpha I + A_\eta^* A_\eta)^{-1} A_\eta^* f_\delta$ с $\alpha = p^{-1}\rho^{-2/(p+1)}(\delta + b_{p\rho}\eta)^{2/(p+1)}$ асимптотически $\mathcal{L}(H, F)$- оптимален на $\mathcal{M}_{p\rho}$ при $0 < p \leqslant 2$.

Непрерывный аналог итерационных методов $u'(t) + A_\eta^* A_\eta u(t) = A_\eta^* f_\delta$, $u(0) = 0$, с выбором момента останова $t = \ln(1+p)\rho^{2/(p+1)}(\delta + b_{p\rho}\eta)^{-2/(p+1)}$ асимптотически $\mathcal{L}(H, F)$-оптимален на $\mathcal{M}_{p\rho}$ при $0 < p \leqslant p_2 \approx 7{,}124$. Итерационные методы

$$u_0 = 0,\ u_n = u_{n-1} - g(A_\eta^* A_\eta)\,A_\eta^*(A_\eta u_{n-1} - f_\delta),\quad n = 1, 2, \ldots$$

с функциями g: $[0, a] \to R$, подчиненными условиям леммы 4.1 гл. II, и остановом на

$$n = \operatorname{int}\{\ln(1+p)\,[g(0)]^{-1}\rho^{2/(p+1)}(\delta + b_{p\rho}\eta)^{-2/(p+1)}\}$$

асимптотически $\mathcal{L}(H, F)$-оптимальны на $\mathcal{M}_{p\rho}$ при тех же $p \in (0, p_2]$.

3. Апостериорный выбор параметра

3.1. **Границы изменения невязки.** Пусть выполнены условия (0.4) и (0.5). По лемме 3.1 гл. III как для приближений (0.2), так и (0.3) имеем

$$\lim_{r \to 0} \|A_\eta u_r - f_\delta\| = \|A_\eta u_0 - f_\delta\|, \tag{3.1}$$

$$\lim_{r \to \infty} \|A_\eta u_r - f_\delta\| = \inf_{u \in H} \|A_\eta u - f_\delta\|. \tag{3.2}$$

Кроме того, при условии (0.14) невязка $\|A_\eta u_r - f_\delta\|$ непрерывна по r и принимает при подходящем $r \in (0, \infty)$ любое значение из промежутка, концы которого определены в (3.2) и (3.1); при условии (0.15) $\|A_\eta u_r - f_\delta\|$ монотонно убывает с ростом r.

Если $f \in \mathscr{R}(A)$, $Au_* = f$, то

$$\lim_{r\to\infty} \| A_\eta u_r - f_\delta \| = \inf_{u\in H} \| A_\eta u - f_\delta \| \leqslant \| A_\eta u_* - f_\delta \| \leqslant \delta + \| u_* \| \eta. \quad (3.3)$$

Эта оценка, вообще говоря, неулучшаема. Действительно, в случае $A = A^* > 0$ возможно, например, равенство $Au_* = \eta u_*$, т. е. u_* — собственный элемент, соответствующий малому собственному значению; элемент $f = \eta u_*$ не обязательно мал — можно взять u_* большой нормы. Обозначим $v_* = u_*/\|u_*\|$ и положим $A_\eta = A - \eta\langle\cdot, v_*\rangle v_*$, $f_\delta = f + \delta v_*$. Тогда $\|f_\delta - f\| = \delta$, $A_\eta = A^*_\eta \geqslant 0$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$, $A_\eta v_* = 0$, $f_\delta - A_\eta u_* = (f_\delta - f) - (A_\eta - A) u_* = (\delta + \|u_*\|\eta) v_* \in \mathscr{N}(A_\eta)$. Для приближения (0.2) отсюда следует

$$A_\eta u_r - f_\delta = (I - A_\eta g_r (A_\eta)) (A_\eta u_0 - f_\delta) = (I - A_\eta g_r (A_\eta)) A_\eta (u_0 - u_*) +$$
$$+ (I - A_\eta g_r(A_\eta)) (A_\eta u_* - f_\delta) = (I - A_\eta g_r (A_\eta)) A_\eta(u_0 - u_*) + A_\eta u_* - f_\delta,$$

и в силу условия (0.5) $\lim\limits_{r\to\infty} \|A_\eta u_r - f_\delta\| = \|A_\eta u_* - f_\delta\| = \delta + \|u_*\|\eta$. Итак, для приближения (0.2) в (3.3) могут достигаться знаки равенства, даже если $A > 0$.

В случае $A \in \mathscr{L}(H, F)$ и приближения (0.3) таких примеров еще больше. Пусть, например, $z_\eta \in F$ таков, что $\|A^* z_\eta\| = \eta$, $\|z_\eta\| = 1$; заметим,. что такой z_η наверняка существует, если $0 < \eta < \|A\|$, а $\mathscr{R}(A^*)$ незамкнута (последнее равносильно незамкнутости $\mathscr{R}(A)$). Допустим, что $\mathscr{N}(A) = 0$. Положив $f = cAA^* z_\eta \in \mathscr{R}(A)$, имеем $u_* = cA^* z_\eta$; обозначим $v_* = u_*/\|u_*\| = u_*/(c\eta)$. Положим далее $f_\delta = f + \delta z_\eta$, $A_\eta = A - \eta\langle\cdot, v_*\rangle z_\eta$. Тогда $\|f_\delta - f\| = \delta$, $\|A_\eta - A\| = \eta$, $f_\delta - A_\eta u_* = (\delta + \|u_*\|\eta) z_\eta$, $z_\eta \in \mathscr{N}(A_\eta^*)$. Поэтому

$$A_\eta u_r - f_\delta = (I - A_\eta A_\eta^* g_r (A_\eta A_\eta^*)) (A_\eta u_0 - f_\delta) =$$
$$= (I - A_\eta A_\eta^* g_r (A_\eta A_\eta^*)) A_\eta (u_0 - u_*) + A_\eta u_* - f_\delta,$$

и в силу условия (0.5) $\lim\limits_{r\to\infty} \|A_\eta u_r - f_\delta\| = \|A_\eta u_* - f_\delta\| = \delta + \|u^*\|\eta$, т. е. в (3.3) опять достигаются знаки равенства.

3.2. **Правила выбора параметра регуляризации.** Неравенство (3.3) и его неулучшаемость подсказывают следующие два правила выбора r, аналогичные правилам П и П′ в п. 3.2 гл. III.

Правило 3.1. Зададим числа $b_1 > 1$ и $b_2 \geqslant b_1$. Если

$$\|A_\eta u_0 - f_\delta\| \leqslant b_2 (\delta + \|u_*\|\eta), \quad (3.4)$$

то положим $r = 0$ и за приближенное решение примем u_0. В противном случае выберем любое $r > 0$, при котором

$$b_1 (\delta + \|u_*\|\eta) \leqslant \|A_\eta u_r - f_\delta\| \leqslant b_2 (\delta + \|u_*\|\eta). \quad (3.5)$$

Здесь u_* — ближайшее к u_0 решение уравнения (0.1). Выбор r по такому правилу осуществим, если невязка $\|A_\eta u_r - f_\delta\|$ непрерывна по r. Формулируемое ниже правило 3.2 в непрерывности невязки не нуждается.

Правило 3.2. Зададим числа $b > 1$ и $\Theta \in (0, 1)$. Если при $r = 0$

$$\|A_\eta u_r - f_\delta\| \leqslant b (\delta + \|u_*\|\eta), \quad (3.6)$$

то положим $r=0$. В противном случае выберем любое r, при котором (3.6) выполнено, причем для некоторого $r'\in[\Theta r,\ r]$

$$\|A_\eta u_{r'}-f_\delta\|\geqslant b(\delta+\|u_*\|\eta). \tag{3.7}$$

Применение правил 3.1 и 3.2 затруднительно: надо знать оценку нормы $\|u_*\|$. Представляют интерес модификации этих правил, в которых $\|u_*\|$ заменяется величиной $\|u_r\|$ или $\|u_0\|+\|u_r-u_0\|$.

Правило 3.3 такое же, как правило 3.1, с заменой (3.4) и (3.5) на условия

$$\|A_\eta u_0-f_\delta\|\leqslant b_2(\delta+\|u_0\|\eta), \tag{3.8}$$

$$b_1[\delta+(\|u_0\|+\|u_r-u_0\|)\eta]\leqslant\|A_\eta u_r-f_\delta\|\leqslant$$
$$\leqslant b_2[\delta+(\|u_0\|+\|u_r-u_0\|\eta]. \tag{3.9}$$

Правило 3.4 такое же, как правило 3.2, с заменой (3.6), (3.7) на

$$\|A_\eta u_r-f_\delta\|\leqslant b[\delta+(\|u_0\|+\|u_r-u_0\|)\eta], \tag{3.10}$$

$$\|A_\eta u_{r'}-f_\delta\|\geqslant b[\delta+(\|u_0\|+\|u_{r'}-u_0\|)\eta]. \tag{3.11}$$

Правило 3.5 такое же, как правило 3.1, с заменой (3.4), (3.5) на

$$\|A_\eta u_0-f_\delta\|\leqslant b_2(\delta+\|u_0\|\eta),$$

$$b_1(\delta+\|u_r\|\eta)\leqslant\|A_\eta u_r-f_\delta\|\leqslant b_2(\delta+\|u_r\|\eta).$$

Правило 3.6 такое же, как правило 3.2, с заменой (3.6), (3.7) на

$$\|A_\eta u_r-f_\delta\|\leqslant b(\delta+\|u_r\|\eta),\qquad \|A_\eta u_{r'}-f_\delta\|\geqslant b(\delta+\|u_{r'}\|\eta).$$

При больших η может случиться, что невязка $\|A_\eta u_r-f_\delta\|$ слишком велика при всех $r>0$ для выполнения условий правил 3.3—3.6 и они не срабатывают. Чтобы быть уверенным в функционировании правил 3.3—3.6 при всех η $(0<\eta\leqslant\eta_0)$, целесообразно наложить на r верхнюю границу, при достижении которой вычисления прекращаются. Эту верхнюю границу следует выбрать так, чтобы при малых $\delta>0$ и $\eta>0$ она не влияла на выбор r. Для приближения (0.2) такой границей оказывается $d/(\delta+\eta)$, $d=\mathrm{const}>0$, а для приближения (0.3) — $d/(\delta+\eta)^2$. Если, например, для приближения (0.3) применяется правило 3.5, но при $r\in[0,\ d/(\delta+\eta)^2]$ невязка не достигла уровня $\|A_\eta u_r-f_\delta\|\leqslant b_2(\delta+\|u_r\|\eta)$, то поиск r прекращаем и выбираем $r=d/(\delta+\eta)^2$.

Правила 3.1—3.6, дополненные для r верхней границей $d/(\delta+\eta)$, назовем правилами 3.1′—3.6′; правила 3.1—3.6, дополненные верхней границей $d/(\delta+\eta)^2$, назовем правилами 3.1″—3.6″. В таких правилах весьма полезны свойства монотонности $\|A_\eta u_r-f_\delta\|$ и $\|u_r-u_0\|$. Монотонное убывание невязки $\|A_\eta u_r-f_\delta\|$, как уже отмечалось, гарантируется условием (0.15).

Если, кроме (0.15), выполнено условие (0.16), то, как показано в п. 5.5 гл. III, $\|u_r - u_0\|$ монотонно возрастает по r. В таком случае множество тех r, для которых выполнено (3.10),— это некоторый бесконечный интервал $[r(\delta, \eta), \infty)$; условие (3.11) не разрешает в нем брать слишком большие r.

Правила 3.4′ и 3.4″ особенно хорошо приспосабливаемы к итерационным методам: итерации останавливаются на первом n, для которого выполнено (3.10), или на $\operatorname{int}\{d/(\delta+\eta)\}$, соответственно, $\operatorname{int}\{d/(\delta+\eta)^2\}$, если невязка не достигла уровня (3.10).

Укажем еще два правила выбора r по «второй» невязке $\|A_\eta^*(A_\eta u_r - f_\delta)\|$ для приближения (0.3). В соответствии с леммой 3.1 гл. III $\|A_\eta^*(A_\eta u_r - f_\delta)\| \to 0$ при $r \to \infty$.

Правило 3.7. Зададим числа $b_1 > 0$ и $b_2 \geqslant b_1$. Если $\|A_\eta^*(A_\eta u_0 - f_\delta)\| \leqslant b_2(\delta+\eta)$, то положим $r=0$. В противном случае выберем любое $r>0$, для которого $b_1(\delta+\eta) \leqslant \leqslant \|A_\eta^*(A_\eta u_r - f_\delta)\| \leqslant b_2(\delta+\eta)$.

Правило 3.8. Зададим числа $b>0$ и $\Theta \in (0, 1)$. Если при $r=0$ выполняется $\|A_\eta^*(A_\eta u_r - f_\delta)\| \leqslant b(\delta+\eta)$, то положим $r=0$. В противном случае выберем такое $r>0$, для которого это неравенство выполнено, причем для некоторого $r' \in [\Theta r, r]$ должно выполняться $\|A_\eta^*(A_\eta u_{r'} - f_\delta)\| \geqslant b(\delta+\eta)$.

Для итерационных методов

$$u_n = u_{n-1} - g(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (A_\eta u_{n-1} - f_\delta), \quad n = 1, 2, \dots$$

из неравенств $0 < \beta = \inf\limits_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} g(\lambda) \leqslant \sup\limits_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} g(\lambda) = \gamma < \infty$ следует, что

$$\beta \| A_\eta^* (A_\eta u_{n-1} - f_\delta) \| \leqslant \| u_n - u_{n-1} \| \leqslant \gamma \| A_\eta^* (A_{r\eta} u_{n-1} - f_\delta) \|,$$

и в правилах 3.7 и 3.8 можно невязку $\|A_\eta^*(A_\eta u_n - f_\delta)\|$ заменить поправкой $\|u_{n+1} - u_n\|$. Таким образом, для итерационных методов правила 3.7 и 3.8 можно трактовать как правила останова по поправке.

3.3. **Формулировка основных результатов** (теоремы 3.1—3.4). Как обычно, под u_* понимаем ближайшее к u_0 решение или квазирешение уравнения (0.1); начальное приближение u_0 считаем не зависящим от δ и η.

Теорема 3.1. Пусть $H=F$, $A=A^* \geqslant 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geqslant 0$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$, $\|A_\eta\| \leqslant a$ $(0 < \eta \leqslant \eta_0)$, $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ и выполнены условия (0.4) и (0.5) с $p_0 > 1$, $\gamma_0 = 1$. Пусть параметр $r = = r(\delta, \eta)$ в приближении (0.2) выбран по любому из правил 3.1, 3.2, 3.3′—3.6′, причем в случае правил 3.5′ и 3.6′ дополнительно предполагаем, что $\mathscr{N}(A) = 0$ или d достаточно мало, так что

$$b_1[1 - d\gamma \max\{\|A\|/\|f\|, 1\}] > 1 \text{ в случае правила 3.5′}, \tag{3.12}$$

$$b[1 - d\gamma \max\{\|A\|/\|f\|, 1\}] > 1 \text{ в случае правила 3.6′}. \tag{3.13}$$

Тогда

$$(\delta+\eta) r(\delta, \eta) \to 0, \quad u_{r(\delta,\eta)} \to u_* \quad \text{при } \delta \to 0, \ \eta \to 0. \tag{3.14}$$

Если начальная погрешность представима в виде

$$u_0 - u_* = A^p v,\ p > 0,\ \|v\| \leqslant \rho, \tag{3.15}$$

то справедливы оценки

$$r(\delta,\ \eta) \leqslant d_{p\rho}(\delta+\eta)^{-1/(p+1)}, \tag{3.16}$$

$$\|u_{r(\delta,\eta)} - u_*\| \leqslant c_{p\rho}(\delta+\eta)^{p/(p+1)},\ 0 < p \leqslant p_0 - 1, \tag{3.17}$$

где постоянные $c_{p\rho}$ и $d_{p\rho}$, кроме p и ρ, зависят от параметров b_1, b_2, b, Θ, d правил выбора r. В случае начальной погрешности (3.15) с $0 < p < p_0 - 1$

$$(\delta+\eta)^{1/(p+1)} r(\delta,\ \eta) \to 0, \tag{3.18}$$

$$\|u_{r(\delta,\eta)} - u_*\| = o((\delta+\eta)^{p/(p+1)}) \quad \text{при } \delta \to 0,\ \eta \to 0. \tag{3.19}$$

Такая же теорема верна для приближения (0.2) и в ситуации, когда $A = A^*$, $A_\eta = A_\eta^*$, $\sigma(A_\eta) \subseteq [-a_0,\ a]$ $(0 < \eta \leqslant \eta_0)$, а вместо (0.4) и (0.5) введены условия (0.8), (0.9) с $p_0 > 1$, $\gamma_0 = 1$. Условие $\gamma_0 = 1$ можно снять, если в правилах выбора r положить $b_1 > \gamma_0$, $b > \gamma_0$.

В условиях теоремы 3.1 метод (0.2), дополненный соответствующим правилом выбора r, определяет $\mathfrak{A}^+$-регуляризатор, где $\mathfrak{A}^+$ — множество неотрицательных самосопряженных операторов. Этот регуляризатор оптимален по порядку на классах $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$, $0 < p \leqslant p_0 - 1$, $\rho > 0$.

Рассмотрим случай, когда $A = A^* \geqslant 0$, но оператор $A_\eta = A_\eta^*$ не обязательно неотрицателен.

Теорема 3.2. Пусть $H = F$, $A = A^* \geqslant 0$, $A_\eta = A_\eta^*$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$, $\|A_\eta\| \leqslant a$ $(0 < \eta \leqslant \eta_0)$, $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ и выполнены условия (0.4), (0.5) с $p_0 > 1$ и (0.12). Пусть параметр $r = r(\delta,\ \eta)$ в приближении (0.2) выбран по одному из правил 3.1′—3.6′, причем в случае правил 3.5′ и 3.6′ считаем выполненным условие $\mathscr{N}(A) = 0$ или соответствующее из условий (3.12) и (3.13). Пусть, наконец,

$$d \leqslant \alpha,\ b_1 > \max\{\gamma_0,\ 1 + d\gamma^-\},\ b > \max\{\gamma_0,\ 1 + d\gamma^-\}, \tag{3.20}$$

где b, b_1 и d — постоянные из правил выбора r, а α и γ^- — постоянные из условия (0.12). Тогда справедливы утверждения теоремы 3.1.

Заметим, что в случае $\gamma_0 = 1$ и произвольных $b_1 > 1$, $b > 1$ неравенства (3.20) выполнены, если d достаточно мало.

Теорема 3.3. Пусть A, $A_\eta \in \mathscr{L}(H,\ F)$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$, $\|A_\eta\|^2 \leqslant a$ $(0 < \eta \leqslant \eta_0)$, $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ и выполнены условия (0.4) и (0.5) с $p_0 > 1/2$, $\gamma_0 = 1$. Пусть параметр $r = r(\delta,\ \eta)$ в приближении (0.3) выбран по любому из правил 3.1, 3.2, 3.3″—3.6″, причем в случае правил 3.5″ и 3.6″ дополнительно считаем выполненным требование $\mathscr{N}(A) = 0$ или

$$b_1[1 - d^{1/2}\gamma_* \max\{\|A\|/\|f\|,\ 1\}] > 1 \text{ в случае правила } 3.5'', \tag{3.21}$$

$$b[1 - d^{1/2}\gamma_* \max\{\|A\|/\|f\|,\ 1\}] > 1 \text{ в случае правила } 3.6''. \tag{3.22}$$

Тогда

$$(\delta+\eta)^2 r(\delta, \eta)\to 0, \quad u_{r(\delta,\eta)}\to u_* \quad \text{при } \delta\to 0, \ \eta\to 0. \tag{3.23}$$

Если начальная погрешность представима в виде

$$u_0-u_*=|A|^p v, \ p>0, \ \|v\|\leqslant\rho, \tag{3.24}$$

то справедливы оценки

$$r(\delta, \eta)\leqslant d_{p\rho}(\delta+\eta)^{-2/(p+1)}, \tag{3.25}$$

$$\|u_{r(\delta,\eta)}-u_*\|\leqslant c_{p\rho}(\delta+\eta)^{p/(p+1)}, \qquad 0<p\leqslant 2p_0-1, \tag{3.26}$$

причем в случае $0<p<2p_0-1$

$$(\delta+\eta)^{2/(p+1)} r(\delta, \eta)\to 0, \tag{3.27}$$

$$\|u_{r(\delta,\eta)}-u_*\|=o((\delta+\eta)^{p/(p+1)}) \quad \text{при } \delta\to 0, \ \eta\to 0. \tag{3.28}$$

Условие $\gamma_0=1$ можно заменить условием $b_1>\gamma_0$, $b>\gamma_0$. В условиях теоремы 3.3 метод (0.3) с соответствующими правилами выбора r определяет $\mathscr{L}(H, F)$-регуляризатор, оптимальный по порядку на классах $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$, $0<p\leqslant 2p_0-1$, $\rho>0$.

Правила 3.7 и 3.8 применимы и в том случае, когда уравнение (0.1) разрешимо в смысле наименьших квадратов. Но при этом получается неоптимальный по порядку на $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$ метод.

Теорема 3.4. Пусть A, $A_\eta\in\mathscr{L}(H, F)$, $\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$, $\|A_\eta\|^2\leqslant a$ $(0<\eta\leqslant\eta_0)$, $Qf\in\mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$ и выполнены условия (0.4) и (0.5) с $p_0>1$. Пусть параметр $r=r(\delta, \eta)$ в приближении (0.3) выбран по правилу 3.7 или 3.8, причем $b_1>\gamma_0\|f-Qf\|$, соответственно $b>\gamma_0\|f-Qf\|$. Тогда

$$(\delta+\eta)r(\delta, \eta)\to 0, \quad u_{r(\delta,\eta)}\to u_* \quad \text{при } \delta\to 0, \ \eta\to 0. \tag{3.29}$$

В случае начальной погрешности (3.24) справедливы оценки

$$r(\delta, \eta)\leqslant d_{p\rho}(\delta+\eta)^{-2/(p+2)}, \tag{3.30}$$

$$\|u_{r(\delta,\eta)}-u_*\|\leqslant c_{p\rho}(\delta+\eta)^{p/(p+2)}, \ 0<p\leqslant 2p_0-2, \tag{3.31}$$

причем в случае $0<p<2p_0-2$

$$(\delta+\eta)^{2/(p+2)} r(\delta, \eta)\to 0, \tag{3.32}$$

$$\|u_{r(\delta,\eta)}-u_*\|=o((\delta+\eta)^{p/(p+2)}) \quad \text{при } \delta\to 0, \ \eta\to 0. \tag{3.33}$$

В случае $f\in\mathscr{R}(A)$ имеем $f-Qf=0$ и $b_1>0$, $b>0$ можно выбрать произвольно. В общем случае условия $b_1>\gamma_0\|f-Qf\|$ и $b>\gamma_0\|f-Qf\|$ убрать нельзя. Поскольку Qf нa неизвестно, то следует положить $b_1>\gamma_0\|f\|$, $b>\gamma_0\|f\|$.

Доказательства теорем 3.1—3.4 даны в пп. 3.5—3.8.

3.4. Вспомогательные результаты. Лемма 3.1. Пусть $A=A^*\geqslant 0$, $A_\eta=A_\eta^*\geqslant 0$, $\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$, $\|A_\eta\|\leqslant a$ и выполнено условие (0.5) с $p_0>1$. Тогда для $G_{r\eta}=I-A_\eta g_r(A_\eta)$ справедливо соотношение

$$r\|A_\eta G_{r\eta}v\|\to 0 \quad \text{при } r\to\infty, \ \eta\to 0 \qquad \forall\, v\in\mathscr{N}(A)^\perp. \tag{3.34}$$

Лемма 3.2. Пусть $A,\ A_\eta \in \mathscr{L}(H,\ F)$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$, $\|A_\eta\|^2 \leqslant a$ и выполнено (0.5) с $p_0 > 1/2$. Тогда

$$r^{1/2} \| A_\eta K_{r\eta} v \| \to 0 \quad \text{при } r \to \infty,\ \eta \to 0 \qquad \forall v \in \mathscr{N}(A)^\perp, \tag{3.35}$$

где $K_{r\eta} = I - A_\eta{}^* A_\eta g_r(A_\eta{}^* A_\eta)$. Если $p_0 > 1$, то

$$r \| A_\eta^* A_\eta K_{r\eta} v \| \to 0 \quad \text{при } r \to \infty,\ \eta \to 0 \qquad \forall v \in \mathscr{N}(A)^\perp. \tag{3.36}$$

Доказательство утверждений (3.34)—(3.36) проводится по единой схеме и основывается на теореме Банаха—Штейнгауза. Ограничимся проверкой условий теоремы Банаха—Штейнгауза для сходимости (3.35). По условию (0.5) нормы операторов ограничены в совокупности: $r^{1/2} \|A_\eta K_{r\eta}\| = r^{1/2} \|(A_\eta{}^* A_\eta)^{1/2} K_{r\eta}\| \leqslant \leqslant \gamma_{1/2}$ $(r > 0,\ \eta > 0)$. Для элементов вида $v = A^* z$, образующих в $\mathscr{N}(A)^\perp = \overline{\mathscr{R}(A^*)}$ плотное подмножество, в силу (0.5) имеем

$$r^{1/2} \| A_\eta K_{r\eta} v \| = r^{1/2} \| A_\eta K_{r\eta} A^* z \| \leqslant r^{1/2} \| A_\eta K_{r\eta} (A^* - A_\eta^*) z \| +$$
$$+ r^{1/2} \| A_\eta K_{r\eta} A_\eta^* z \| \leqslant (\gamma_{1/2} \eta + r^{1/2} \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} \lambda | 1 - \lambda g_r(\lambda) |) \| z \| \to 0$$

при $r \to \infty$, $\eta \to 0$. Мы учли, что $A_\eta K_{r\eta} A_\eta{}^* = A_\eta A_\eta{}^* (I - A_\eta A_\eta{}^* g_r(A_\eta A_\eta{}^*))$ (см. лемму 3.1 гл. II). Леммы 3.1 и 3.2 доказаны.

Соотношение (3.34) остается в силе и в случае, когда операторы A_η знакопеременны, но в дополнение к условиям леммы 3.1 выполнено условие (0.12), а также когда операторы A и A_η знакопеременны, $\sigma(A_\eta) \subseteq [-a_0,\ a]$, а вместо (0.5) выполнено (0.9) с $p_0 > 1$. Подобные дополнения можно высказать и к формулируемым ниже леммам 3.3 и 3.5.

Лемма 3.3. Пусть $A = A^* \geqslant 0$, $A_\eta = A_\eta{}^* \geqslant 0$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$, $\|A_\eta\| \leqslant a$ и выполнены условия (0.4) и (0.6). Если для некоторых $v_0 \in \mathscr{N}(A)^\perp$, $r_n \leqslant \bar{r} = \text{const}$ и $\eta_n \to 0$ имеем $A_{\eta_n} G_{r_n \eta_n} v_0 \to 0$ при $n \to \infty$, то $G_{r_n \eta_n} v_0 \to 0$.

Лемма 3.4. Пусть $A,\ A_\eta \in \mathscr{L}(H,\ F)$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$, $\|A_\eta\|^2 \leqslant a$ и выполнены условия (0.4) и (0.6). Если для некоторых $v_0 \in \in \mathscr{N}(A)^\perp$, $r_n \leqslant \bar{r} = \text{const}$ и $\eta_n \to 0$ имеем $A_{\eta_n} K_{r_n \eta_n} v_0 \to 0$ или $A_{\eta_n}^* A_{\eta_n} K_{r_n \eta_n} v_0 \to 0$ при $n \to \infty$, то $K_{r_n \eta_n} v_0 \to 0$.

Доказательство этих лемм аналогично доказательству леммы 3.2 гл. III.

Лемма 3.5. Пусть $A = A^* \geqslant 0$, $A_\eta = A_\eta{}^* \geqslant 0$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$, $\|A_\eta\| \leqslant a$, $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ и выполнены условия (0.6) и (0.7). Тогда для приближения (0.2) имеем

$$\varliminf_{r \to \infty, \delta \to 0, \eta \to 0} \| u_r - u_0 \| \geqslant \| u_* - u_0 \|, \tag{3.37}$$

а если $\mathscr{N}(A) = 0$, то и

$$\varliminf_{r \to \infty, \delta \to 0, \eta \to 0} \| u_r \| \geqslant \| u_* \|. \tag{3.38}$$

Лемма 3.6. Пусть $A,\ A_\eta \in \mathscr{L}(H,\ F)$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$, $\|A_\eta\|^2 \leqslant a$, $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ и выполнены условия (0.6) и (0.7). Тогда для приближения (0.3) справедливо (3.37), а в случае $\mathcal{N}(A)=0$ также (3.38).

Доказательство лемм 3.5 и 3.6 проводится по одинаковой схеме, и мы ограничимся случаем леммы 3.5. Заметим прежде всего, что

$$\|A_\eta u_r - f_\delta\| \to 0 \text{ при } r\to\infty,\ \delta\to 0,\ \eta\to 0 \tag{3.39}$$

(здесь, как и в (3.37) и (3.38), предел берется при независимом стремлении аргументов к своим предельным значениям, без всякого согласования r с δ и η). Действительно,

$$A_\eta u_r - f_\delta = G_{r\eta}(A_\eta u_0 - f_\delta) = G_{r\eta}A(u_0 - u_*) + G_{r\eta}[(A_\eta - A)u_0 - \\ - (f_\delta - f)].$$

По лемме 2.1 $\|G_{r\eta}A(u_0-u_*)\|\to 0$ при $r\to\infty$, $\eta\to 0$; в силу (0.6) $\|G_{r\eta}\|\leqslant\gamma_0$, и мы приходим к (3.39).

Соотношение (3.37) докажем от противного: допустим, что для некоторых $r_n\to\infty$, $\delta_n\to 0$, $\eta_n\to 0$ имеем $\lim\|n_{r_n}-u_0\|<\|u_*-u_0\|$. Тогда последовательность u_{r_n} ограничена, и из нее можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность; пусть $u_{r_n}\dashrightarrow u'$. Тогда $Au_{r_n}\dashrightarrow Au'$. Из (3.39) следует, что $Au_{r_n}\to f$. Поэтому $Au'=f$, т. е. u' — решение уравнения (0.1). Из слабой сходимости $u_{rn}-u_0\dashrightarrow u'-u_0$ следует, что $\|u'-u_0\|\leqslant\underline{\lim}\|u_{r_n}-u_0\|<\|u_*-u_0\|$, а это противоречит определению u_* как ближайшего к u_0 решения уравнения (0.1). Противоречие доказывает (3.37). Соотношение (3.38) доказывается таким же образом. Леммы 3.5 и 3.6 доказаны.

3.5. **Доказательство теоремы 3.1.** Для приближения (0.2) имеем

$$u_r - u_* = G_{r\eta}(u_0 - u_*) + g_r(A_\eta)(f_\delta - A_\eta u_*), \tag{3.40}$$

$$A_\eta u_r - f_\delta = A_\eta G_{r\eta}(u_0 - u_*) - G_{r\eta}(f_\delta - A_\eta u_*). \tag{3.41}$$

Из доказательства теоремы 2.1 нам известно, что

$$\|G_{r\eta}(u_0-u_*)\|\to 0 \quad \text{при } r\to\infty,\ \eta\to 0, \tag{3.42}$$

$$\|g_r(A_\eta)(f_\delta - A_\eta u_*)\|\leqslant\gamma r(\delta+\|u_*\|\eta); \tag{3.43}$$

в силу леммы 3.1

$$\sigma_{r\eta}\equiv r\|A_\eta G_{r\eta}(u_0-u_*)\|\to 0 \quad \text{при } r\to\infty,\ \eta\to 0. \tag{3.44}$$

1. Случай правила 3.1. Если правило 3.1 выдает $r=0$ при сколь угодно малых $\delta>0$, $\eta>0$, т. е. $\|A_\eta u_0 - f_\delta\|\leqslant b_2(\delta+\|u_*\|\eta)$, то в пределе $\delta\to 0$, $\eta\to 0$ получаем $Au_0=f$, т. е. u_0 — решение уравнения (0.1). В таком случае утверждения теоремы тривиальны. Будем считать, что при достаточно малых $\delta>0$ и $\eta>0$ правило 3.1 выдает $r=r(\delta,\eta)>0$. Поскольку $\|G_{r\eta}\|\leqslant\gamma_0=1$, то из (3.5) и (3.41) следует, что при $r=r(\delta,\eta)$

$$\|A_\eta G_{r\eta}(u_0-u_*)\|\leqslant(b_2+1)(\delta+\|u_*\|\eta), \tag{3.45}$$

$$\|A_\eta G_{r\eta}(u_0-u_*)\|\geqslant(b_1-1)(\delta+\|u_*\|\eta). \tag{3.46}$$

Из (3.46) и (3.44) следует первое из соотношений (3.14); подробные рассуждения в аналогичной ситуации проведены в п. 3.4 гл. III. Второе из соотношений (3.14) затем следует из (3.40), (3.42) и (3.43), если $r(\delta, \eta) \to \infty$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$; если же $r(\delta, \eta) \leqslant \leqslant \mathrm{const}$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$, то вместо (3.42) здесь привлекается (3.45) и лемма 3.3.

Пусть $u_0 - u_*$ представимо в виде (3.15). Оценим заново элемент $A_\eta G_{r\eta}(u_0 - u_*)$. В силу (0.5) и леммы 1.1

$$\|A_\eta G_{r\eta}(u_0 - u_*)\| = \|A_\eta G_{r\eta} A^p v\| \leqslant \|A_\eta G_{r\eta}(A^p - A_\eta^p) v\| +$$
$$+ \|A_\eta^{p+1} G_{r\eta} v\| \leqslant (\varepsilon_{rp}\eta + \gamma_{p+1} r^{-(p+1)})\rho, \quad 0 \leqslant p \leqslant p_0 - 1, \tag{3.47}$$

где $\varepsilon_{rp} \to 0$ при $r \to \infty$. Сопоставляя это с (3.46), получим

$$\gamma_{p+1} r^{-(p+1)} \rho \geqslant (b_1 - 1)\delta + [(b_1 - 1)\|u_*\| - \varepsilon_{rp}\rho]\eta.$$

Отсюда следует оценка (3.16).

Оценка (3.17) следует из (3.40), (3.43), (3.16) и проводимой ниже оценки члена $G_{r\eta}(u_0 - u_*)$. Имеем

$$\|G_{r\eta}(u_0 - u_*)\| = \|G_{r\eta} A^p v\| \leqslant \|G_{r\eta}(A^p - A_\eta^p) v\| + \|G_{r\eta} A_\eta^p v\|.$$

По лемме 1.1 $\|G_{r\eta}(A^p - A_\eta{}^p) v\| \leqslant c_p \eta^{\min\{1,p\}} \rho$, что дает в оценку $\|u_r - u_*\|$ вклад $o((\delta + \eta)^{p/(p+1)})$. Норму $\|G_{r\eta} A_\eta{}^p v\|$ оценим при помощи неравенства моментов, леммы 1.1 и неравенства (3.45):

$$\|G_{r\eta} A_\eta^p v\| = \|A_\eta^p G_{r\eta} v\| \leqslant \|A_\eta^{p+1} G_{r\eta} v\|^{p/(p+1)} \|G_{r\eta} v\|^{1/(p+1)} \leqslant$$
$$\leqslant \|A_\eta G_{r\eta} A_\eta^p v\|^{p/(p+1)} \|v\|^{1/(p+1)} \leqslant (\|A_\eta G_{r\eta}(A_\eta^p - A^p) v\| +$$
$$+ \|A_\eta G_{r\eta}(u_0 - u_*)\|)^{p/(p+1)} \rho^{1/(p+1)} \leqslant$$
$$\leqslant [\varepsilon_{rp}\eta\rho + (b_2 + 1)(\delta + \|u_*\|\eta)]^{p/(p+1)} \rho^{1/(p+1)}. \tag{3.48}$$

В итоге приходим к искомой оценке (3.17).

При $0 < p < p_0 - 1$ справедливо соотношение $r^{p+1}\|A_\eta{}^{p+1} G_{r\eta} v\| \to \to 0$ при $r \to \infty$, $\eta \to 0$ (ср. с (3.34); без ограничения общности можно считать, что $v \in \mathcal{N}(A)^\perp$). Вводя соответствующее уточнение в (3.47), приходим к (3.18). Наконец, оценку (3.19) получаем повторением проведенных выкладок, воспользовавшись соотношением (3.18) вместо (3.16) и уточнив (3.48) за счет сходимости $\|G_{r\eta} v\| \to 0$ при $r \to \infty$, $\eta \to 0$. Мы завершили доказательство теоремы 3.1 в случае правила 3.1 выбора r.

2. Случай правила 3.2. Дальнейшие цели заставляют нас трактовать это правило несколько шире, чем это дано в п. 3.2. А именно, считаем заданными числа $b' > 1$, $b \geqslant b'$ и $\Theta \in \in (0, 1)$ и будем выбирать такое $r = r(\delta, \eta)$, что

$$\|A_\eta u_r - f_\delta\| \leqslant b(\delta + \|u_*\|\eta), \tag{3.49}$$

$$\exists r' \in [\Theta r, r]: \|A_\eta u_{r'} - f_\delta\| \geqslant b'(\delta + \|u_*\|\eta) \tag{3.50}$$

(к правилу 3.2 возвращаемся, если $b' = b$). Если $r = r(\delta, \eta) > 0$ удовлетворяет этим неравенствам, то (ср. с (3.45) и (3.46)) $r(\delta, \eta) \leqslant r'(\delta, \eta)/\Theta$,

$$\|A_\eta G_{r\eta}(u_0 - u_*)\| \leqslant (b + 1)(\delta + \|u_*\|\eta),$$

$$\|A_\eta G_{n'\eta}(u_0-u_*)\| \geqslant (b'-1)(\delta+\|u_*\|\eta).$$

Дальнейшие рассуждения повторяют проведенные.

3. Случай правила 3.3′. Как и в случае остальных правил, теорема тривиальна, если правило 3.3′ выдает $r=0$ при сколь угодно малых $\delta>0$ и $\eta>0$, т. е. если $Au_0=f$. Будем считать, что $Au_0\neq f$. Наша цель — показать, что тогда при достаточно малых $\delta>0$ и $\eta>0$ для выбранного по правилу 3.3′ $r=r(\delta, \eta)$ выполняются неравенства

$$(b_1-\varepsilon)(\delta+\|u_*\|\eta) \leqslant \|A_\eta u_r - f_\delta\| \leqslant (b_2+\varepsilon)[\delta+(\|u_0\|+ \\ +\|u_*-u_0\|)\eta], \tag{3.51}$$

где $\varepsilon>0$ сколь угодно мало (зафиксируем его так, что $b_1-\varepsilon>1$). Тем самым доказательство теоремы с правилом 3.3′ будет сведено к случаю правила 3.1.

Покажем, что при достаточно малых $\delta>0$ и $\eta>0$

$$r(\delta, \eta) < d/(\delta+\eta) \tag{3.52}$$

(правило 3.3′ при таких δ и η равносильно правилу 3.3). Действительно, достаточно рассмотреть случай $r(\delta, \eta)\to\infty$ при $\delta\to 0$, $\eta\to 0$. Если $r(\delta, \eta)\geqslant d/(\delta+\eta)$, то $1/r(\delta, \eta)\leqslant(\delta+\eta)/d$, и при малых $\delta>0$, $\eta>0$ из (3.41), (3.44) и (3.37) получаем

$$\|A_\eta u_r - f_\delta\| \leqslant \sigma_{r\eta} r^{-1} + \delta + \|u_*\|\eta < b_1[\delta+(\|u_0\|+\|u_r-u_0\|)\eta],$$

что противоречит (3.9). Противоречие доказывает (3.52).

Из (3.40), (3.42), (3.43) и (3.52) следует, что $\|u_{r(\delta,\eta)}\|\leqslant \mathrm{const}$ при $\delta\to 0$, $\eta\to 0$. Если $r(\delta, \eta)\to\infty$ при $\delta\to 0$, $\eta\to 0$, то из (3.9) и (3.37) при достаточно малых $\delta>0$ и $\eta>0$ получаем

$$(b_1-\varepsilon)(\delta+\|u_*\|\eta) \leqslant \|A_\eta u_r - f_\delta\| \leqslant c(\delta+\|u_*\|\eta)$$

с большой пока постоянной c. Но это уже позволяет применить теорему с правилом 3.1 и получить сходимость $u_{r(\delta,\eta)}\to u_*$, а затем из (3.9) получить уточненные неравенства (3.51). Если же $r(\delta, \eta)\leqslant\bar r=\mathrm{const}$ при $\delta\to 0$, $\eta\to 0$, то сходимость $u_{r(\delta,\eta)}\to u_*$ получаем при помощи леммы 3.3, а затем из (3.9) — снова (3.51). Тем самым завершено доказательство теоремы 3.1 в случае правила 3.3′ выбора r.

4. Случай правила 3.4′ сводится к случаю правила 3.2 в расширенной трактовке (3.49), (3.50). А именно, если $r=r(\delta, \eta)>0$ определено по правилу 3.4′, то, как и выше, доказывается, что при достаточно малых $\delta>0$ и $\eta>0$ выполняется (3.52) и правило 3.4′ при таких $\delta>0$ и $\eta>0$ равносильно правилу 3.4. Затем показывается, что для $r=r(\delta, \eta)$ при достаточно малых $\delta>0$ и $\eta>0$

$$\|A_\eta u_r - f_\delta\| \leqslant (b+\varepsilon)[\delta+(\|u_0\|+\|u_*-u_0\|)\eta],$$

$$\|A_\eta u_{r'} - f_\delta\| \geqslant (b-\varepsilon)(\delta+\|u_*\|\eta).$$

5. Случай правила 3.5′. Если $\mathcal{N}(A)=0$, то рассуждения вполне аналогичны случаю правила 3.3′ с использованием (3.38)

вместо (3.37). Рассмотрим случай, когда выполнено (3.12). Из (3.40), (3.42) и (3.43) с учетом неравенства $r(\delta, \eta) \leqslant d/(\delta+\eta)$ получаем

$$\varliminf_{\delta \to 0, \eta \to 0} \|u_{r(\delta,\eta)}\| \geqslant \|u_*\| - \varlimsup_{\delta \to 0, \eta \to 0} \gamma r(\delta, \eta)(\delta + \|u_*\| \eta) \geqslant$$
$$\geqslant \|u_*\| - \gamma d(\delta + \|u_*\| \eta)(\delta + \eta)^{-1} \geqslant$$
$$\geqslant \|u_*\|(1 - \gamma d \max\{1/\|u_*\|, 1\}).$$

Из равенства $Au_* = f$ следует, что $1/\|u_*\| \leqslant \|A\|/\|f\|$. Привлекая (3.12), окончательно получаем

$$\varliminf_{\delta \to 0, \eta \to 0} b_1 \|u_{r(\delta,\eta)}\| \geqslant b_1' \|u_*\|, \quad b_1' > 1.$$

Это неравенство позволяет, как и выше, свести случай правила 3.5′ к случаю правила 3.1. В случае правила 3.6′ доказательство аналогично. Теорема 3.1 доказана.

3.6. **Доказательство теоремы 3.2** получается незначительным видоизменением рассуждений предыдущего пункта. Из условий теоремы следует, что $\sigma(A_\eta) \subseteq [-\eta, a]$, поэтому при $\eta \leqslant \alpha r^{-1}$ (при $r \leqslant \alpha/\eta$)

$$\|G_{r\eta}\| \leqslant \sup_{-\eta \leqslant \lambda \leqslant a} |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant \max\{\gamma_0, 1 + \gamma^- r\eta\}.$$

Максимальное значение $r = r(\delta, \eta)$, допускаемое правилами 3.1′—3.6′, равно $d/(\delta+\eta)$, и с учетом первого из условий (3.20) получаем $\|G_{r(\delta,\eta),\eta}\| \leqslant \max\{\gamma_0, 1 + d\gamma^-\}$. Вместо (3.45) и (3.46) получаем

$$\|A_\eta G_{r\eta}(u_0 - u_*)\| \leqslant [b_2 + \max\{\gamma_0, 1 + d\gamma^-\}](\delta + \|u_*\| \eta),$$
$$\|A_\eta G_{r\eta}(u_0 - u_*)\| \geqslant]b_1 - \max\{\gamma_0, 1 + d\gamma^-\}](\delta + \|u_*\| \eta).$$

Здесь вступает в действие второе из условий (3.20), позволяющее перенести дальнейшие рассуждения в русло п. 3.5. Предварительно убеждаемся, что при достаточно малых $\delta > 0$ и $\eta > 0$ правила 3.1′ и 3.2′ равносильны соответственно правилам 3.1 и 3.2.

3.7. **Доказательство теоремы 3.3** повторяет доказательство теоремы 3.1. Чтобы прояснить причины количественных различий в формулировках двух теорем, мы повторим доказательство в пределах правила 3.1.

Для погрешности и невязки приближения (0.3) справедливы формулы

$$u_r - u_* = K_{r\eta}(u_0 - u_*) + g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u_*), \tag{3.53}$$
$$A_\eta u_r - f_\delta = A_\eta K_{r\eta}(u_0 - u_*) - \widetilde{K}_{r\eta}(f_\delta - A_\eta u_*), \tag{3.54}$$

где $K_{r\eta} = I - A_\eta^* A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta)$, $\widetilde{K}_{r\eta} = I - A_\eta A_\eta^* g_r(A_\eta A_\eta^*)$. В силу леммы 2.2 и (2.19)

$$\|K_{r\eta}(u_0 - u_*)\| \to 0 \quad \text{при } r \to \infty, \ \eta \to 0, \tag{3.55}$$
$$\|g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u_*)\| \leqslant \gamma_* r^{1/2} (\delta + \|u_*\| \eta); \tag{3.56}$$

в силу леммы 3.2

$$\sigma_{r\eta} \equiv r^{1/2} \| A_\eta K_{r\eta} (u_0 - u_*) \| \to 0 \quad \text{при } r \to \infty, \ \eta \to 0. \tag{3.57}$$

Допустим, что $Au_0 \neq f$. Тогда правило 3.1 при достаточно малых $\delta > 0$ и $\eta > 0$ выдает $r = r(\delta, \eta) > 0$. Поскольку $\|\bar{K}_{r\eta}\| \leqslant \gamma_0 = 1$, то из (3.5) и (3.54) следует, что при $r = r(\delta, \eta)$

$$\|A_\eta K_{r\eta}(u_0 - u_*)\| \leqslant (b_2 + 1)(\delta + \|u_*\|\eta), \tag{3.58}$$

$$\|A_\eta K_{r\eta}(u_0 - u_*)\| \geqslant (b_1 - 1)(\delta + \|u_*\|\eta). \tag{3.59}$$

Из (3.57) и (3.59) следует первое из соотношений (3.23). Из него и (3.53), (3.55) и (3.56) следует и второе из соотношений (3.23), если $r(\delta, \eta) \to \infty$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$. Если же $r(\delta, \eta) \leqslant \bar{r} = \text{const}$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$, то вместо (3.55) привлекается (3.58) и лемма 3.4.

Пусть $u_0 - u_*$ имеет вид (3.24). В силу (0.5) и леммы 1.2

$$\| A_\eta K_{r\eta} (u_0 - u_*) \| = \| A_\eta K_{r\eta} \, | A |^p v \| \leqslant \| A_\eta K_{r\eta} \, (| A |^p - | A_\eta |^p v \| +$$
$$+ \| A_\eta K_{r\eta} \, | A_\eta |^p v \| \leqslant (\varepsilon_{rp} \eta + \gamma_{(p+1)/2} r^{-p+1)/2}) \rho, \quad 0 < p \leqslant 2p_0 - 1, \tag{3.60}$$

где $\varepsilon_{rp} \to 0$ при $r \to \infty$. Сопоставляя это с (3.59), получим
$\gamma_{(p+1)/2} r^{-(p+1)/2} \rho \geqslant (b_1 - 1)\delta + [(b_1 - 1)\|u_*\| - \varepsilon_{rp}\rho]\eta.$
Отсюда следует оценка (3.25). При $0 < p < 2p_0 - 1$

$$r^{(p+1)/2} \|A_\eta K_{r\eta} |A_\eta|^p v\| \to 0 \quad \text{при } r \to \infty, \ \eta \to 0$$

(ср. с (3.35); можно считать, что $v \in \mathcal{N}(A)^\perp$). Вводя соответствующие уточнения в (3.60), получаем также соотношение (3.27).

Оценка (3.26) следует из (3.53), (3.56), (3.25) и проводимой ниже оценки члена $K_{r\eta}(u_0 - u_*)$. Имеем

$$\|K_{r\eta} (u_0 - u_*)\| = \|K_{r\eta} \, |A|^p v\| \leqslant \|K_{r\eta} \, (|A|^p - |A_\eta|^p) v\| +$$
$$+ \|K_{r\eta} \, |A_\eta|^p v\|.$$

По лемме 1.2

$$\| K_{r\eta} \, (| A |^p - | A_\eta |^p) v \| \leqslant c_p (1 + | \ln \eta |) \, \eta^{\min\{1, p\}} \| v \|,$$

и вклад этого члена в оценку $\|u_r - u_*\|$ имеет порядок $o(\eta^{p/(p+1)})$. Член $\|K_{r\eta} |A_\eta|^p v\|$ оценим при помощи неравенства моментов, леммы 1.2 и неравенства (3.58):

$$\| K_{r\eta} \, | A_\eta |^p v \| = \| \, | A_\eta |^p K_{r\eta} v \| \leqslant \| \, | A_\eta |^{p+1} K_{r\eta} v \|^{p/(p+1)} \| K_{r\eta} v \|^{1/(p+1)} \leqslant$$
$$\leqslant \| A_\eta K_{r\eta} \, | A_\eta |^p v \|^{p/(p+1)} \| v \|^{1/(p+1)} \leqslant$$
$$\leqslant (\| A_\eta K_{r\eta} \, (| A_\eta |^p - | A |^p) v \| + \| A_\eta K_{r\eta} \, (u_0 - u_*) \|)^{p/(p+1)} \rho^{1/(p+1)} \leqslant$$
$$\leqslant [\varepsilon_{rp} \eta \rho + (b_2 + 1)(\delta + \| u_* \| \eta]^{p/(p+1)} \rho^{1/(p+1)}.$$

В итоге приходим к оценке (3.26). Если здесь учесть, что $\|K_{r\eta} v\| \to 0$ при $r \to \infty$, $\eta \to 0$, а вместо (3.25) привлечь (3.27), то получаем также соотношение (3.28). Доказательство теоремы

3.3 в случае правила 3.1 выбора r завершено. Случаи других правил не вносят в доказательство новых моментов.

3.8. **Доказательство теоремы 3.4.** Формула (3.53) верна и в случае $Qf \in \mathscr{R}(A)$. Из нее следует, что

$$A_\eta^*(A_\eta u_r - f_\delta) = A_\eta^* A_\eta K_{r\eta}(u_0 - u_*) - K_{r\eta} A_\eta^*(f_\delta - A_\eta u_*). \qquad (3.61)$$

При этом (см. (2.29) и его вывод)

$$\| g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^*(f_\delta - A_\eta u_*) \| \leqslant \gamma_* r^{1/2}(\delta + \| u_* \| \eta) + \gamma r \| f - Qf \| \eta, \quad (3.62)$$

$$\| K_{r\eta} A_\eta^*(f_\delta - A_\eta u_*) \| \leqslant \gamma_{1/2} r^{-1/2}(\delta + \| u_* \| \eta) + \gamma_0 \| f - Qf \| \eta. \qquad (3.63)$$

В силу леммы 3.2

$$\sigma_{r\eta} \equiv r \| A_\eta{}^* A_\eta K_{r\eta}(u_0 - u_*) \| \to 0 \quad \text{при } r \to \infty, \ \eta \to 0. \qquad (3.64)$$

Если правило 3.7 при сколь угодно малых $\delta > 0$ и $\eta > 0$ выдает $r = 0$, то $A^*(Au_0 - f) = 0$, т. е. u_0 — квазирешение уравнения (0.1), и утверждения теоремы тривиальны. Будем считать, что $r = r(\delta, \eta)$, определяемое правилом 3.7, положительно. Из условий правила и (3.61), (3.63) находим, что для указанных $r = r(\delta, \eta)$

$$\| A_\eta^* A_\eta K_{r\eta}(u_0 - u_*) \| \leqslant b_2(\delta + \eta) + \gamma_{1/2} r^{-1/2}(\delta + \| u_* \| \eta) + \gamma_0 \| f - Qf \| \eta, \qquad (3.65)$$

$$\| A_\eta^* A_\eta K_{r\eta}(u_0 - u_*) \| \geqslant b_1(\delta + \eta) - \gamma_{1/2} r^{-1/2}(\delta + \| u_* \| \eta) - \gamma_0 \| f - Qf \| \eta. \qquad (3.66)$$

По условию теоремы $b_1 - \gamma_0 \| f - Qf \| > 0$. Поэтому если $r(\delta, \eta) \to \infty$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$, то при достаточно малых $\delta > 0$ и $\eta > 0$

$$\| A_\eta^* A_\eta K_{r\eta}(u_0 - u_*) \| \geqslant b_1'(\delta + \eta), \quad b_1' > 0.$$

Отсюда совместно с (3.64) находим, что $(\delta + \eta) r(\delta, \eta) \to 0$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$. Отсюда и из (3.53), (3.55) и (3.62) получаем сходимость $u_{r(\delta,\eta)} \to u_*$, если $r(\delta, \eta) \to \infty$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$; если же $r(\delta, \eta) \leqslant \bar{r} = \text{const}$, то вместо (3.55) привлекается (3.65) и лемма 3.4. Мы доказали (3.29).

В случае начальной погрешности (3.24) при помощи леммы 1.2 и условия (0.5) находим

$$\begin{aligned}\| A_\eta^* A_\eta K_{r\eta}(u_0 - u_*) \| &= \| A_\eta^* A_\eta K_{r\eta} |A|^p v \| \leqslant \\ &\leqslant \| A_\eta^* A_\eta K_{r\eta}(|A|^p - |A_\eta|^p) v \| + \| A_\eta^* A_\eta K_{r\eta} |A_\eta|^p v \| \leqslant \\ &\leqslant (\varepsilon_{rp}' \eta + \gamma_{(p+2)/2} r^{-(p+2)/2}) \rho, \quad 0 < p \leqslant 2p_0 - 2,\end{aligned}$$

где $\varepsilon'_{rp} \to 0$ при $r \to \infty$. Совместно с (3.66) это дает оценку (3.30). Вывод остальных оценок проводится по стандартной схеме. В случае правила 3.8 доказательство аналогично. Доказательство теоремы 3.4 завершено.

3.9. **Случай неограниченных операторов.** Результаты параграфа сохраняют силу и в случае неограниченных операторов A и A_η, если ограниченной является разность $A_\eta - A$, $\| A_\eta - A \| \leqslant \eta$.

Конечно, условия (0.4), (0.5) и т. д. должны выполняться с $a=\infty$. Кроме того, условия (3.12) и (3.13) следует принять в виде

$$b_1[1-d\gamma\max\{1/\|u_*\|,\ 1\}]>1,\quad b[1-d\gamma\max\{1/\|u_*\|,\ 1\}]>1,$$

а условия (3.21) и (3.22) — в виде

$$b_1[1-d^{1/2}\gamma_*\max\{1/\|u_*\|,\ 1\}]>1,\quad b[1-d^{1/2}\gamma_*\max\{1/\|u_*\|,\ 1\}]>1.$$

В случае неограниченного A нет естественной оценки величины $1/\|u_*\|$ и правила 3.5′, 3.6′, 3.5″, 3.6″ практически применимы лишь при условии $\mathscr{N}(A)=0$.

Оказывается, что теорема 3.1 остается в силе и в случае, когда для самосопряженных неотрицательных операторов A и A_η вместо $\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$ имеем $\mathscr{D}(A_\eta)\supseteq\mathscr{D}(A)$,

$$\|A_\eta u-Au\|\leqslant\eta(\|u\|+\|Au\|)\quad \forall u\in\mathscr{D}(A), \tag{3.67}$$

а теоремы 3.3 и 3.4 — в случае, когда для замкнутых плотно определенных операторов A и A_η имеем $\mathscr{D}(A_\eta)\supseteq\mathscr{D}(A)$, $\mathscr{D}(A_\eta^*)\supseteq\supseteq\mathscr{D}(A^*)$ и

$$\|A_\eta u-Au\|\leqslant\eta(\|u\|+\|Au\|)\quad \forall u\in\mathscr{D}(A)\subseteq H, \tag{3.68}$$

$$\|A_\eta^*z-A^*z\|\leqslant\eta(\|u\|+\|A_\eta^*z\|)\quad \forall z\in\mathscr{D}(A^*)\subseteq F. \tag{3.69}$$

В доказательстве этих теорем происходят лишь незначительные изменения (вместо лемм 1.1 и 1.2 используются леммы 1.4 и 1.5). В пояснениях нуждается другое, а именно применимость правил 3.1—3.6 и их модификаций,— последнее из неравенств в цепочке (3.3) теперь неверно. Покажем, что тем не менее

$$\inf_{u\ni\mathscr{D}(A)}\|A_\eta u-f_\delta\|\leqslant\delta+\|u_*\|\eta, \tag{3.70}$$

откуда следует $\lim\limits_{r\to\infty}\|A_\eta u_r-f_\delta\|\leqslant\delta+\|u_*\|\eta$. Это обеспечивает применимость указанных правил выбора r. Доказательство достаточно провести в условиях (3.68), (3.69). Обозначим через Q_η ортопроектор в F, проектирующий на $\overline{\mathscr{R}(A_\eta)}$. Имеем $(I-Q_\eta)A_\eta=0$, $A_\eta^*(I-Q_\eta)=0$, вследствие чего (3.69) дает $\|(I-Q_n)\times\times(A-A_\eta)\|=\|(A^*-A_\eta^*)(I-Q_\eta)\|\leqslant\eta$, и мы приходим к (3.70):

$$\inf_{u\in D(A)}\|A_\eta u-f_\delta\|=\|(I-Q_\eta)f_\delta\|=$$
$$=\|(I-Q_\eta)(f_\delta-f)+(I-Q_\eta)(A-A_\eta)u_*\|\leqslant\delta+\|u_*\|\eta.$$

Отметим, что условие (3.69) близко условию

$$\|A_\eta^*z-A^*z\|\leqslant\eta(\|z\|+\|A^*z\|)\qquad\forall z\in\mathscr{D}(A^*). \tag{3.71}$$

Точнее, при $\eta<1$ из (3.69) следует

$$\|A_\eta^*z-A^*z\|\leqslant\frac{\eta}{1-\eta}(\|z\|+\|A^*z\|),$$

а из (3.71)

$$\|A_\eta^*z-A^*z\|\leqslant\frac{\eta}{1-\eta}(\|z\|+\|A_\eta^*z\|)$$

В случае, когда выполнено лишь условие (3.68), а условие (3.69) нарушается, имеем $\inf\limits_{u\in\mathscr{D}(A)} \|A_\eta u - f_\delta\| \leqslant \delta + (\|u_*\| + \|f\|)\eta$ и правила 3.1—3.6 нуждаются в соответствующих модификациях. Например, условия (3.5) следует принять в виде

$$b_1[\delta+(\|u_*\|+\|f\|)\eta] \leqslant \|A_\eta u_r - f_\delta\| \leqslant b_2[\delta+(\|u_*\|+\|f\|)\eta].$$

3.10. **Критический уровень невязки.** Если порождающая система функций $g_r: [0,\ a]\to R$ удовлетворяет условиям (0.17) и (0.14), то для приближения (0.3) удается обосновать выбор параметра r из условия

$$\|A_\eta u_r - f_\delta\| = \delta + \|u_*\|\eta \tag{3.72}$$

или более практического условия

$$\|A_\eta u_r - f_\delta\| = \delta + (\|u_0\| + \|u_r - u_0\|)\eta. \tag{3.73}$$

Правда, оценки оптимального порядка на классах $\mathscr{M}_{p\rho u_0}$ удается установить лишь в случае (3.72); выбор (3.73) может приводить к существенно завышенным значениям r. Это вынуждает делать пессимистический вывод о целесообразности привлечения критического уровня невязки в случае неточно заданного оператора. Подробности см. в [20, 22].

Напомним, что для приближения (0.2) критический уровень невязки приводит к расходящемуся процессу даже в случае точно заданного оператора (см. п. 4.2 гл. III).

4. Помехоустойчивость итерационных методов

4.1. **Случай самосопряженной задачи.** Переформулировка результатов разд. 2, 3 для итерационных методов не вызывает особого труда. Дополним соответствующие результаты изучением устойчивости итерационных методов приближений относительно малых возмущений типа погрешностей округления. Подобные возмущения, как будет видно из дальнейшего, в некорректных задачах безопасны лишь при не слишком большом количестве итерационных шагов.

Начнем с рассмотрения итерационного метода

$$u_n = u_{n-1} - g(A_\eta)(A_\eta u_{n-1} - f_\delta),\quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{4.1}$$

для самосопряженной задачи (0.1) с $H=F$, $A=A^*\geqslant 0$. Из-за погрешностей округления или каких-то других помех на каждом шаге итераций допускаются неточности, и реальные вычисления можно промоделировать итерационной схемой

$$\tilde{u}_n = \tilde{u}_{n-1} - g(A_\eta)(A_\eta\tilde{u}_{n-1} - f_\delta) + w_n,\quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.2}$$

где $w_n\in H$, $n\geqslant 1$, — малые в каком-то смысле возмущения. Здесь будем считать, что $\|w_n\|\leqslant\varepsilon$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, где ε — малый положительный параметр (обычно $\varepsilon\ll\delta+\eta$). Более сложный случай, когда w_n ($n=1, 2, \ldots$) малы лишь в вероятностном смысле, изучается в следующей главе.

Теорема 4.1. Пусть $H=F$, $A=A^*\geqslant 0$, $A_\eta=A_\eta^*$, $\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$, $\|A_\eta\|\leqslant a$ $(0<\eta\leqslant\eta_0)$, $f\in\mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$, $\|w_n\|\leqslant\varepsilon$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Пусть функция g: $[-\alpha, a]\to R$ непрерывна и

$$0<g(\lambda)<2/\lambda \text{ при } 0\leqslant\lambda\leqslant a. \tag{4.3}$$

Остановим итерации (4.2) на таком $n=n(\delta, \eta, \varepsilon)$, что

$$n(\delta, \eta, \varepsilon)\to\infty, \quad (\delta+\eta+\varepsilon)n(\delta, \eta, \varepsilon)\to 0$$
$$\text{при } \delta\to 0,\ \eta\to 0,\ \varepsilon\to 0. \tag{4.4}$$

Тогда $\tilde{u}_{n(\delta,\eta,\varepsilon)}\to u_*$ при $\delta\to 0$, $\eta\to 0$, $\varepsilon\to 0$, где u_* — ближайшее к $\tilde{u}_0=u_0$ решение уравнения (0.1).

Если начальная погрешность представима в виде

$$u_0-u_*=A^p v,\ p>0,\ \|v\|\leqslant\rho, \tag{4.5}$$

то при

$$n=\operatorname{int}\{d(\delta+\eta+\varepsilon)^{-1/(p+1)}\},\ d=\mathrm{const}>0 \tag{4.6}$$

справедлива оценка погрешности

$$\|\tilde{u}_n-u_*\|\leqslant c_{p\rho d}(\delta+\eta+\varepsilon)^{p/(p+1)},\ 0<p<\infty. \tag{4.7}$$

Доказательство. Индукцией по n убеждаемся, что

$$\begin{aligned}\tilde{u}_n &= (I-A_\eta g(A_\eta))^n u_0+\sum_{j=0}^{n-1}(I-A_\eta g(A_\eta))^j g(A_\eta) f_\delta+\\ &+\sum_{j=0}^{n-1}(I-A_\eta g(A_\eta))^j w_{n-j}=(I-A_\eta g_n(A_\eta))u_0+\\ &+g_n(A_\eta)f_\delta+\sum_{j=0}^{n-1}(I-A_\eta g(A_\eta))^j w_{n-j}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Функция g_n определена формулой (4.3) гл. II; в силу леммы 4.1 гл. II для нее выполнены условия (0.4) и (0.5) с $p_0=\infty$, $\gamma_0=1$, а также условие (0.12). Из (4.8) находим

$$\begin{aligned}\tilde{u}_n-u_* &= (I-A_\eta g_n(A_\eta))(u_0-u_*)+g_n(A_\eta)(f_\delta-A_\eta u_*)+\\ &+\sum_{j=0}^{n-1}(I-A_\eta g(A_\eta))^j w_{n-j}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Отсюда

$$\|\tilde{u}_n-u_*\|\leqslant\|(I-A_\eta g_n(A_\eta))(u_0-u_*)\|+\gamma n(\delta+\|u_*\|\eta)+n\varepsilon. \tag{4.10}$$

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательства теорем 2.1

и 2.2, которые соответствуют случаю $\varepsilon=0$. Доказательство теоремы 4.1 завершено.

Из (4.10) видно, что погрешность $\|\tilde{u}_n-u_*\|$ от ε зависит таким же образом, как от δ и η. Иначе обстоит дело с невязкой $\|A_\eta\tilde{u}_n-f_\delta\|$, и при останове по невязке мы вынуждены потребовать большей малости ε по сравнению с δ и η.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия теоремы 4.1, причем $\varepsilon=\varepsilon(\delta, \eta)$ таково, что

$$\varepsilon(\delta, \eta)\,|\ln(\delta+\eta)|/(\delta+\eta)\to 0 \text{ при } \delta\to 0,\ \eta\to 0. \tag{4.11}$$

Остановим итерации (4.2) на первом $n=n(\delta, \eta)$, для которого выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\|A_\eta\tilde{u}_n-f_\delta\|\leqslant b(\delta+\|\tilde{u}_n\|\eta), \quad n\geqslant d/(\delta+\eta), \tag{4.12}$$

где $b>1$, $0<d\leqslant\alpha$ (в случае $A_\eta\geqslant 0$ можно считать $\alpha=0$, а $d>0$ произвольным). Тогда

$$(\delta+\eta)n(\delta, \eta)\to 0,\ \tilde{u}_{n(\delta,\eta)}\to u_* \text{ при } \delta\to 0,\ \eta\to 0. \tag{4.13}$$

Если начальная погрешность представима в виде (4.5), то

$$n(\delta, \eta)\leqslant d_{p\rho}(\delta+\eta)^{-1/(p+1)}, \tag{4.14}$$

$$\|\tilde{u}_{n(\delta,\eta)}-u_*\|\leqslant c_{p\rho}(\delta+\eta)^{p/(p+1)},\ 0<p<\infty. \tag{4.15}$$

Второе из неравенств (4.12) влияет на выбор момента останова только при немалых $\delta>0$ и $\eta>0$.

Доказательство этой теоремы в основном повторяет доказательство теорем 3.1 и 3.2. Наша цель — показать, что при условии (4.11) возмущения w_n в итерациях (4.2) не успевают повлиять ни на невязку $\|A_\eta\tilde{u}_n-f_\delta\|$, ни на погрешность $\|\tilde{u}_n-u_*\|$. Из (4.9) вытекает формула

$$A_\eta\tilde{u}_n-f_\delta=A_\eta(I-A_\eta g_n(A_\eta))(u_0-u_*)-\\-(I-A_\eta g_n(A_\eta))(f_\delta-A_\eta u_*)+\sum_{j=0}^{n-1}A_\eta(I-A_\eta g(A_\eta))^j w_{n-j}. \tag{4.16}$$

Здесь (ср. с (3.44))

$$\sigma_{n\eta}\equiv n\|A_\eta(I-A_\eta g_n(A_\eta))(u_0-u_*)\|\to 0 \quad \text{при } n\to\infty,\ \eta\to 0. \tag{4.17}$$

Покажем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty,\eta\to 0,n\leqslant d/\eta}}\|I-A_\eta g_n(A_\eta)\|\leqslant e^{dg(0)} \tag{4.18}$$

(в случае $A_\eta\geqslant 0$ эту деталь доказательства можно опустить, так как тогда $\|I-A_\eta g_n(A_\eta)\|\leqslant 1$). Действительно, из неравенства $n\leqslant d/\eta$ следует, что $\eta\leqslant d/n$, поэтому

$$\|I-A_\eta g_n(A_\eta)|\leqslant\sup_{-\eta\leqslant\lambda\leqslant a}|1-\lambda g_n(\lambda)|\leqslant\\\leqslant\max\left\{1,\ \sup_{-d/n\leqslant\lambda\leqslant 0}|1-\lambda g_n(\lambda)|\right\}.$$

Но (см. замечание 3 к лемме 4.1 гл. II)

$$\varlimsup_{n\to\infty} n^{-1} \sup_{-d/n\leqslant\lambda\leqslant 0} |g_n(\lambda)| \leqslant (e^{dg(0)}-1)d^{-1},$$

поэтому

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{-d/n\leqslant\lambda\leqslant 0} |1-\lambda g_n(\lambda)| \leqslant 1+\varlimsup_{n\to\infty}\frac{d}{n} \sup_{-d/n\leqslant\lambda\leqslant 0} |g_n(\lambda)| \leqslant e^{dg(0)},$$

и мы приходим к (4.18).

Оценим в (4.16) член с возмущениями w_n, считая выполненным неравенство $n\leqslant d/(\delta+\eta)$:

$$\left\|\sum_{j=0}^{n-1} A_\eta (I-A_\eta g(A_\eta))^j w_{n-j}\right\| \leqslant \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \sup_{-d/n\leqslant\lambda\leqslant a} |\lambda|\,|1-\lambda g(\lambda)|^j \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\left(a+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{c_1}{j}\right) \leqslant \varepsilon(a+c_2\ln n) \leqslant \varepsilon(\delta,\eta)(a+c_3|\ln(\delta+\eta))$$

$c_1, c_2, c_3 = \mathrm{const}.$

Мы учли, что для функций g_n выполнено условие (0.12), откуда для $1-\lambda g_j(\lambda)=(1-\lambda g(\lambda))^j$ вытекает неравенство (0.13); кроме того, мы воспользовались неравенством (0.5). В силу условия (4.11) отсюда следует, что

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\delta\to 0,\eta\to 0\\ n\leqslant d/(\delta+\eta)}} \frac{\left\|\sum\limits_{j=0}^{n-1} A_\eta (I-A_\eta g(A_\eta))^j w_{n-j}\right\|}{\delta+\eta}=0. \qquad (4.19)$$

Примем правило останова итераций в несколько упрощенной для теоретических рассуждений форме: итерации (4.2) остановим на первом $n=n(\delta,\eta)$, для которого выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\|A_\eta\tilde{u}_n - f_\delta\| \leqslant b(\delta+\|u_*\|\eta), \quad n\geqslant d/(\delta+\eta), \qquad (4.20)$$

в которых по-прежнему $b>1$, а постоянная $d>0$ достаточно мала, так что

$$e^{dg(0)}<b. \qquad (4.21)$$

Ради простоты ограничимся рассмотрением основного случая, когда $n(\delta,\eta)\to\infty$ при $\delta\to 0$, $\eta\to 0$ (случай ограниченного $n(\delta,\eta)$ поддается анализу п. 3.5). Заметим, что $n(\delta,\eta)-1\leqslant d/(\delta+\eta)$, что позволяет применять соотношения (4.17)—(4.19) и получить из (4.16) при малых $\delta>0$ и $\eta>0$

$$\|A_\eta\tilde{u}_{n(\delta,\eta)} - f_\delta\| \leqslant \frac{\sigma}{n(\delta,\eta)} + (e^{dg(0)}+q)(\delta+\|u_*\|\eta),$$

где

$$\sigma=\sigma(\delta,\eta)\to 0,\quad q=q(\delta,\eta)\to 0 \quad \text{при } \delta\to 0,\ \eta\to 0.$$

Если $n(\delta, \eta) \geqslant d/(\delta+\eta)$, то отсюда и из (4.21) при малых $\delta>0$ и $\eta>0$ получаем

$$\|A_\eta \tilde{u}_{n(\delta,\eta)} - f_\delta\| < b(\delta + \|u_*\|\eta),$$

т. е. останов итераций (4.2) все равно происходит из-за выполнения первого из неравенств (4.20).

Из (4.16)—(4.18) теперь получаем при $n=n(\delta, \eta)$

$$\|A_\eta(I - A_\eta g_n(A_\eta))(u_0 - u_*)\| \leqslant [b + e^{dg(0)} + q(\delta, \eta)](\delta + \|u_*\|\eta),$$
$$\|A_\eta(I - A_\eta g_{n-1}(A_\eta))(u_0 - u_*)\| \geqslant [b - e^{dg(0)} - q(\delta, \eta)](\delta + \|u_*\|\eta).$$

Это аналоги неравенств (3.45) и (3.46). Дальнейшие рассуждения полностью следуют доказательству теорем 3.1 и 3.2 и не будут повторены. Отметим только, что выполнение условий (3.13), (3.20) достигается за счет малости $d>0$; величина d влияет на останов итераций лишь при немалых δ и η. Теорема 4.2 доказана.

4.2. **Случай несамосопряженной задачи.** Рассмотрим итерационной метод

$$u_n = u_{n-1} - g(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (A_\eta u_{n-1} - f_\delta), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.22}$$

и его возмущенный аналог

$$\tilde{u}_n = \tilde{u}_{n-1} - g(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (A_\eta \tilde{u}_{n-1} - f_\delta) + w_n, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{4.23}$$

Метод (4.22) требует большего числа итераций, чем метод (4.1), вследствие чего возмущения w_n ($\|w_n\| \leqslant \varepsilon$) успевают больше накопиться, и при останове итераций мы вынуждены наложить на ε более жесткие условия, чем в теоремах 4.1 и 4.2.

Теорема 4.3. Пусть A, $A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$, $\|A_\eta\|^2 \leqslant a$ $(0<\eta\leqslant\eta_0)$, $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$, $\|w_n\| \leqslant \varepsilon \leqslant c(\delta+\eta)^2$ $(n=1, 2, \ldots)$, $c=\mathrm{const}$. Пусть функция $g: [0, a] \to R$ непрерывна и удовлетворяет условию (4.3). Остановим итерации (4.23) на таком $n=n(\delta, \eta)$, что

$$n(\delta, \eta) \to \infty, \quad (\delta+\eta)^2 n(\delta, \eta) \to 0 \text{ при } \delta \to 0, \ \eta \to 0. \tag{4.24}$$

Тогда $\tilde{u}_{n(\delta,\eta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$, где u_* — ближайшее к $\tilde{u}_0 = u_0$ решение уравнения (0.1). Если начальная погрешность представима в виде

$$u_0 - u_* = |A|^p v, \ p>0, \ \|v\| \leqslant \rho, \tag{4.25}$$

то при

$$n = \mathrm{int}\,\{d(\delta+\eta)^{-2/(p+1)}\}, \ d = \mathrm{const} > 0 \tag{4.26}$$

справедлива оценка погрешности

$$\|\tilde{u}_n - u_*\| \leqslant c_{p\rho d}(\delta+\eta)^{p/(p+1)}, \ 0<p<\infty. \tag{4.27}$$

Доказательство основывается на формуле

$$\tilde{u}_n - u_* = (I - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta))(u_0 - u_*) + \\ + g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u_*) + \sum_{j=0}^{n-1} (I - A_\eta^* A_\eta g(A_\eta^* A_\eta))^j w_{n-j}; \tag{4.28}$$

функция g_n определена формулой (4.3) гл. II и удовлетворяет условиям (0.4) и (0.5) с $p_0 = \infty$, $\gamma_0 = 1$. Отсюда

$$\|\tilde{u}_n - u_*\| \leqslant \|(I - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta))(u_0 - u_*)\| + \gamma_* n^{1/2}(\delta + \|u_*\|\eta) + n\varepsilon\cdot \tag{4.29}$$

Дальнейшие выкладки очевидны (ср. с доказательством теоремы 2.3). Теорема 4.3 доказана.

Теорема 4.4. Пусть выполнены условия теоремы 4.3. Остановим итерации (4.23) на первом $n = n(\delta, \eta)$, для которого выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\|A_\eta \tilde{u}_n - f_\delta\| \leqslant b(\delta + \|\tilde{u}_n\|\eta), \qquad n \geqslant d/(\delta + \eta)^2, \tag{4.30}$$

где $b = \mathrm{const} > 1$, $d = \mathrm{const} > 0$. Тогда

$$(\delta + \eta)^2 n(\delta, \eta) \to 0, \quad \tilde{u}_{n(\delta,\eta)} \to u_* \quad \text{при } \delta \to 0, \ \eta \to 0. \tag{4.31}$$

Если начальная погрешность представима в виде (4.25), то

$$n(\delta, \eta) \leqslant d_{p\rho}(\delta + \eta)^{p/(p+1)}, \tag{4.32}$$

$$\|\tilde{u}_{n(\delta,\eta)} - u_*\| \leqslant c_{p\rho}(\delta + \eta)^{p/(p+1)}, \quad 0 < p < \infty. \tag{4.33}$$

Доказательство. Из (4.28) вытекает формула

$$A_\eta \tilde{u}_n - f_\delta = A_\eta (I - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta))(u_0 - u_*) - \\ - (I - A_\eta A_\eta^* g_n(A_\eta A_\eta^*))(f_\delta - A_\eta u_*) + \\ + \sum_{j=0}^{n-1} A_\eta (I - A_\eta^* A_\eta g(A_\eta^* A_\eta))^j w_{n-j}. \tag{4.34}$$

Здесь (см. (3.57))

$$\sigma_{n\eta} \equiv n^{1/2} \|A_\eta (I - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta))(u_0 - u_*)\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty, \ \eta \to 0, \tag{4.35}$$

$$\|(I - A_\eta A_\eta^* g_n(A_\eta A_\eta^*))(f_\delta - A_\eta u_*)\| \leqslant \delta + \|u_*\|\eta, \tag{4.36}$$

$$\left\| \sum_{j=0}^{n-1} A_\eta (I - A_\eta^* A_\eta g(A_\eta^* A_\eta))^j w_{n-j} \right\| \leqslant \varepsilon \left(a + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_1}{j^{1/2}} \right) \leqslant \varepsilon (a + c_2 n^{1/2}), \tag{4.37}$$

поэтому

$$\|A_\eta \tilde{u}_n - f_\delta\| \leqslant \sigma_{n\eta} n^{-1/2} + \delta + \|u_*\|\eta + \varepsilon(a + c_2 n^{1/2}).$$

Взяв пробное $n=\beta/(\delta+\eta)^2$ с малым $\beta>0$, получаем, что при достаточно малых $\delta>0$ и $\eta>0$

$$|A_\eta\tilde{u}_n - f_\delta\| \leqslant \sigma_{n\eta}\beta^{-1/2}(\delta+\eta) + \delta + \|u_*\|\eta + \\ + c(\delta+\eta)^2(a + c_2\beta^{1/2}/(\delta+\eta)) < b(\delta + \|u_*\|\eta).$$

Это говорит о том, что при достаточно малых $\delta>0$ и $\eta>0$ итерации (4.23) можно остановить на первом $n=n(\delta, \eta)$, для которого

$$\|A_\eta\tilde{u}_n - f_\delta\| \leqslant b(\delta + \|u_*\|\eta), \quad b>1, \tag{4.38}$$

и тогда $(\delta+\eta)^2 n(\delta, \eta)\to 0$ при $\delta\to 0$, $\eta\to 0$. Из (4.34)—(4.37) получаем

$$\|A_\eta(I - A_\eta^* A_\eta g_{n(\delta,\eta)}(A_\eta^* A_\eta))(u_0 - u_*)\| \leqslant (b+1+q)(\delta + \|u_*\|\eta),$$
$$\|A_\eta(I - A_\eta^* A_\eta g_{n(\delta,\eta)-1}(A_\eta^* A_\eta))(u_0 - u_*)\| \geqslant (b-1-q)(\delta + \|u_*\|\eta),$$

где $q=q(\delta, \eta)\to 0$ при $\delta\to 0$, $\eta\to 0$. Это аналоги неравенств (3.58) и (3.59) и, повторяя рассуждения п. 3.7, получаем доказательство теоремы при останове итераций по правилу (4.38). Переход к правилу останова (4.30) проводится стандартным образом. Теорема 4.4 доказана.

4.3. **Оценки накопления погрешностей округления.** Сравним идеальные итерационные приближения u_n с возмущенными $\tilde{u}_n$.

Теорема 4.5. Пусть $H=F$, $A_\eta=A_\eta^*\geqslant 0$, $\|A_\eta\|\leqslant a$, $\|w_n\|\leqslant\varepsilon$ $(n=1, 2, \ldots)$. Пусть непрерывная функция $g:[0, a]\to R$ удовлетворяет условию (4.3). Тогда для итерационных приближений (4.1) и (4.2) справедливы оценки

$$\|\tilde{u}_n - u_n\| \leqslant n\varepsilon, \tag{4.39}$$

$$\|(A_\eta\tilde{u}_n - f_\delta) - (A_\eta u_n - f_\delta)\| \leqslant c(\ln n)\varepsilon, \quad c=\mathrm{const},\ n=1, 2, \ldots. \tag{4.40}$$

Доказательство вытекает из равенств

$$\tilde{u}_n - u_n = \sum_{j=0}^{n-1}(I - A_\eta g(A_\eta))^j w_{n-j}, \tag{4.41}$$

$$(A_\eta\tilde{u}_n - f_\delta) - (A_\eta u_n - f_\delta) = \sum_{j=0}^{n-1} A_\eta(I - A_\eta g(A_\eta))^j w_{n-j}$$

и неравенств

$$\|I - A_\eta g(A_\eta)\| \leqslant \max_{0\leqslant\lambda\leqslant a}|1 - \lambda g(\lambda)| \leqslant 1,$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\|A_\eta(I - A_\eta g(A_\eta))^j\| \leqslant a + c_2\ln n$$

(см. доказательство теоремы 4.2). Теорема доказана.

При $w_n\in\mathcal{N}(A_\eta)$ $(n=1, 2, \ldots)$ равенство (4.41) принимает вид

$$\tilde{u}_n - u_n = \sum_{j=0}^{n-1} w_{n-j},$$

поэтому оценка (4.39) неулучшаема. Нет оснований утверждать, что и оценка (4.40) неулучшаема. Однако можно доказать, что (см. [88])

$$\sup_{\{w_n\}} \overline{\lim_{n\to\infty}} \|(A_\eta \tilde{u}_n - f_\delta) - (A_\eta u_n - f_\delta)\| = \infty,$$

где верхняя грань берется по всем последовательностям $\{w_n\} \subset H$, $\|w_n\| \leqslant \varepsilon$ $(n=1, 2, \dots)$.

В случае $A = A^* \geqslant 0$, но не обязательно неотрицательного оператора $A_\eta = A_\eta^*$ $(\|A_\eta - A\| \leqslant \eta)$, погрешность может накапливаться существенно быстрее, чем в случае $A_\eta \geqslant 0$. Правда, при $n \leqslant d/\eta$ мы еще не вошли в опасную зону:

$$\|\tilde{u}_n - u_n\| \leqslant \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} (1 + c'\eta)^j \leqslant n\varepsilon (1 + c'dn^{-1})^n \leqslant e^{c'd} n\varepsilon,$$

$$c' = \max_{-\alpha \leqslant \lambda \leqslant \eta} |g(\lambda)|.$$

Теорема 4.6. Пусть $A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A_\eta\|^2 \leqslant a$, $\|w_n\| \leqslant \varepsilon$ $(n = 1, 2, \dots)$. Пусть непрерывная функция $g: [0, a] \to R$ удовлетворяет неравенству (4.3). Тогда для итерационных приближений (4.22) и (4.23) справедливы оценки

$$\|\tilde{u}_n - u_n\| \leqslant n\varepsilon, \tag{4.42}$$

$$\|(A_\eta \tilde{u}_n - f_\delta) - (A_\eta u_n - f_\delta)\| \leqslant c_1 n^{1/2} \varepsilon, \tag{4.43}$$

$$\|A_\eta^* (A_\eta \tilde{u}_n - f_\delta) - A_\eta^* (A_\eta u_n - f_\delta)\| \leqslant c_2 (\ln n) \varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{4.44}$$

Доказательство вытекает из равенства

$$\tilde{u}_n - u_n = \sum_{j=0}^{n-1} (I - A_\eta^* A_\eta g(A_\eta^* A_\eta))^j w_{n-j}.$$

Оценка (4.42) неулучшаема, а в дополнение к оценкам (4.43) и (4.44) отметим, что (см. [88])

$$\sup_{\{w_n\}} \|(A_\eta \tilde{u}_n - f_\delta) - (A_\eta u_n - f_\delta)\| \geqslant c_1' (\ln n)^{1/2} \varepsilon, \quad c_1' = \mathrm{const} > 0,$$

$$\sup_{\{w_n\}} \overline{\lim_{n\to\infty}} \|A_\eta^* (A_\eta \tilde{u}_n - f_\delta) - A_\eta^* (A_\eta u_n - f_\delta)\| = \infty,$$

где верхняя грань берется по всем последовательностям $\{w_n\} \subset H$ с $\|w_n\| \leqslant \varepsilon$ $(n=1, 2, \dots)$.

В условиях теорем 4.2—4.4 останов итераций происходит до того, как погрешности округлений успевают настолько накопиться, чтобы испортить результат по сравнению с идеальными итерациями.

5 глава

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В УСЛОВИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК

В предыдущих главах были исследованы регуляризационные свойства различных итерационных методов решения линейного уравнения, в том числе при неточно заданных операторе A и правой части f исходной задачи. В практических вычислениях приходится еще учитывать влияние неизбежных ошибок на каждом шаге вычислений, вызванных, например, погрешностями округления. Настоящая глава посвящена анализу одной из возможных моделей, позволяющих учесть эти дополнительные ошибки (см. схемы (4.3) гл. IV и (2.1) ниже). Оказывается, что здесь можно применять обычные правила останова или некоторые их модификации, если эти добавочные ошибки достаточно малы. При этом малость можно понимать в различных смыслах. Случай малых по норме ошибок рассмотрен в разд. 4 гл. III. Настоящая глава посвящена исследованию влияния случайных ошибок, малых в некотором вероятностном смысле (см. разд. 2—4). Такой подход, по-видимому, естествен, так как часто ошибки округления можно считать случайными. В этой ситуации удается установить сходимость приближенных решений к точному также в каком-либо вероятностном смысле. Мы ограничиваемся рассмотрением апостериорных правил останова. Анализ априорных правил может быть проведен на основе тех же методов. В разд. 1 приведены некоторые сведения из теории вероятностей. Разд. 4 посвящен описанию модели одного статистического подхода к априорному выбору параметра регуляризации.

1. Некоторые сведения из теории вероятностей

Здесь предполагается, что читатель знаком с основами теории вероятностей. Некоторые известные результаты приводятся без доказательств; эти доказательства можно найти, например, в [78]. Часть результатов являются аналогами известных теорем для случая гильбертова пространства и для семейств случайных величин (с. в.), зависящих от параметра; они приведены с доказательствами.

1.1. **Случайные величины со значениями в гильбертовом пространстве.** В дальнейшем нам придется иметь дело со случайными помехами w'_n в итерационных процедурах. При этом всегда предполагается заданным полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, на котором определены все с. в. $w_1, w_2, \ldots$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, наделенном борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}$ (т. е. минимальной σ-алгеброй, содержащей все шары вида $(x \in H : \|x - x_0\| < r)$). Хорошо известна

Лемма 1.1. Если $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \to (H, \mathcal{B})$ — случайная величина, то $\|\xi\| : (\Omega, \mathcal{F}) \to (R^1, \mathcal{B}^1)$ — также случайная величина.

В дальнейшем мы будем использовать выражения типа $\mathbf{P}(\|\xi\| > \varepsilon) < \delta$ без напоминания о том, что множество $(\omega : \|\xi(\omega)\| > > \varepsilon)$ является событием, т. е. входит в $\mathcal{F}$, и, значит, определена его вероятность.

Пусть $\mathbf{E}\|\xi\| < \infty$. Тогда существует такой (неслучайный) вектор $m \in H$, что $\mathbf{E}\langle\xi, l\rangle = \langle m, l\rangle$ при всяком $l \in H$ (см., например, [66, 76]). Вектор m определен однозначно, он называется математическим ожиданием ξ и обозначается $\mathbf{E}\xi$.

1.2. **Условное математическое ожидание.** Пусть $\mathcal{G}$ — под-σ-алгебра σ-алгебры $\mathcal{F}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, т. е. любое множество из σ-алгебры $\mathcal{G}$ входит в $\mathcal{F}$. Если ξ — с. в. на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ со значениями в H и с конечным математическим ожиданием $\mathbf{E}\|\xi\| < \infty$, то условным математическим ожиданием ξ при условии $\mathcal{G}$ называется такая случайная величина η на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ со значениями в H, что (1°) η $\mathcal{G}$-измерима (2°), $\mathbf{E}I(\mathcal{D}) \times \times \langle\xi - \eta, l\rangle = 0$ для всякого $\mathcal{D} \in \mathcal{G}$, $l \in H$. Существование и единственность такой с. в. η с точностью до значений на множестве $\mathbf{P}$-меры нуль из σ-алгебры $\mathcal{F}$ можно вывести из теоремы Радона—Никодима о производной меры и теории распределений в гильбертовом пространстве (см. [66], а также [76]).

Условное математическое ожидание ξ при условии $\mathcal{G}$ обозначается $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})$. Равенство $\eta = \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})$ понимается как равенство почти наверное.

Пусть ζ — еще одна с. в. на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Обозначим через $\mathcal{F}^\zeta$ σ-алгебру, порожденную ζ, т. е. минимальную σ-алгебру, содержащую всевозможные множества вида $(\omega : \zeta(\omega) \in \Gamma, \Gamma \in \mathcal{B})$. Тогда условным математическим ожиданием ξ при условии ζ называется с. в. $\mathbf{E}(\xi|\zeta) = \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}^\zeta)$. Здесь полезно следующее утверждение (см., например, [78]).

Лемма. Найдется такая борелевская функция h, что $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}^\zeta) = h(\zeta)$ (п. н.)

Из определения вытекают следующие свойства условных математических ожиданий. Пусть $\mathcal{G}$ — под-сигма-алгебра $\mathcal{F}$.

1. $\mathbf{E}\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \mathbf{E}\xi$.
2. Пусть η $\mathcal{G}$-измерима, $\mathbf{E}\|\eta\| < \infty$, $\mathbf{E}\|\xi\eta\| < \infty$. Тогда $\mathbf{E}(\eta\xi|\mathcal{G}) = \eta\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})$ ($\mathbf{P}$ — п. н.).
3. Если a, b — постоянные и $a\mathbf{E}\xi + b\mathbf{E}\eta < \infty$, то $\mathbf{E}(a\xi + b\eta|\mathcal{G}) = a\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) + b\mathbf{E}(\eta|\mathcal{G})$.

1.3. **Неравенство Колмогорова.** Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые в совокупности с. в. со значениями в гильбертовом пространстве H, $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $S_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_i$. Тогда для всякого $c > 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|S_k\|\geqslant c\right)\leqslant c^{-2}\,\mathbf{E}\|S_n\|^2.$$

Доказательство (аналогично, например, [78]). Пусть

$$\mathscr{D}=\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|S_k\|\geqslant c\right),$$

$$\mathscr{D}_k=(\|S_i\|<c,\ 1\leqslant i\leqslant k-1,\ \|S_k\|\geqslant c),\qquad 1\leqslant k\leqslant n.$$

Тогда

$$\mathscr{D}=\sum_{k=1}^{n}\mathscr{D}_k,\ \mathbf{E}\|S_n\|^2\geqslant\mathbf{E}\|S_n\|^2 I(\mathscr{D})=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\|S_n\|^2 I(\mathscr{D}_k).$$

Но

$$\mathbf{E}\|S_n\|^2 I(\mathscr{D}_k)=\mathbf{E}\|S_k\|^2 I(\mathscr{D}_k)+2\mathbf{E}\langle S_k,(\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n)\rangle I(\mathscr{D}_k)+$$
$$+\mathbf{E}\|\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n\|^2 I(\mathscr{D}_k)\geqslant\mathbf{E}\|S_k\|^2 I(\mathscr{D}_k),$$

поскольку

$$\mathbf{E}\langle S_k,\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n\rangle I(\mathscr{D}_k)=$$
$$=\mathbf{E}\mathbf{E}(\langle S_k,\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n\rangle I(\mathscr{D}_k)\,|\,\mathscr{F}_k^{\xi})=0$$

($\mathscr{F}_k^{\xi}=\sigma(\xi_1,\ldots,\xi_k)$ — σ-алгебра, порожденная с. в. $\xi_1,\ldots,\xi_k$). Стало быть,

$$\mathbf{E}\|S_n\|^2\geqslant\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\|S_k\|^2 I(\mathscr{D}_k)\geqslant c^2\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(\mathscr{D}_k)=c^2\mathbf{P}(\mathscr{D}),$$

что и доказывает искомое неравенство.

1.4. Сходимость последовательностей случайных величин. Пусть ξ_n, $n=1,2,\ldots$ — случайные величины на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$ со значениями в H. Говорят, что последовательность сходится (к некоторой с. в. ξ) по вероятности, если $\mathbf{P}(\|\xi_n-\xi\|>c)\to 0$, $n\to\infty$, для всякого $c>0$, и сходится к ней в среднем квадратичном, если $\mathbf{E}\|\xi_n-\xi\|^2\to 0$, $n\to\infty$.

Предложение 1.1 (ср., например, с [78]). 1. Последовательность ξ_n сходится с вероятностью 1 (к некоторой с. в. ξ) тогда и только тогда, когда последовательность $\xi_n(\omega)$, $n\geqslant 1$, фундаментальна для почти всех $\omega\in\Omega$. 2. Последовательность $\xi_n(\omega)$, $n\geqslant 1$, фундаментальна для почти всех $\omega\in\Omega$ тогда и только тогда, когда для всякого $c>0$

$$\mathbf{P}(\sup_{k\geqslant 0}\|\xi_{n+k}-\xi_n\|\geqslant c)\to 0,\quad n\to\infty.$$

Доказательство. 1. Если $\mathbf{P}(\xi_n\to\xi)=1$, то

$$\mathbf{P}\left(\sup_{k,l\geqslant n}\|\xi_k-\xi_l\|\leqslant\sup_{k\geqslant n}\|\xi_k-\xi\|+\sup_{l\geqslant n}\|\xi_l-\xi\|\underset{n\to\infty}{\to}0\right)=1,$$

т. е. последовательность $\xi_n(\omega)$ фундаментальна при почти всех ω.

Наоборот, пусть $\mathscr{N}=(\omega:\xi_n(\omega)$ не фундаментальна$)$ и $\mathbf{P}(\mathscr{N})=0$. Пусть

$$\xi(\omega)=\begin{cases}\lim\xi_n(\omega), & \omega\notin\mathscr{N},\\ 0, & \omega\in\mathscr{N}\end{cases}$$

(вне $\mathcal{N}$ предел $\lim \xi_n(\omega)$ существует). Тогда ξ — случайная величина и $\mathbf{P}(\xi_n \to \xi)=1$.

2. Пусть

$$B^{\varepsilon}_{k,l}=(\omega\colon \|\xi_k(\omega)-\xi_l(\omega)\| \geqslant \varepsilon), \quad B^{\varepsilon}=\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{\substack{k\geqslant n\\ l\geqslant n}} B^{\varepsilon}_{k,l}.$$

Тогда $\mathcal{N}=\bigcup\limits_{\varepsilon>0} B^{\varepsilon}=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B^{1/m}$. Поэтому

$$\mathbf{P}(\mathcal{N})=0 \Leftrightarrow \mathbf{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} B^{1/m}\right)=0 \Leftrightarrow \mathbf{P}(B^{1/m})=0,\ m\geqslant 1 \Leftrightarrow \mathbf{P}(B^{\varepsilon})=0,$$

$$\varepsilon>0 \Leftrightarrow \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n, l\geqslant n} B^{\varepsilon}_{k,l}\right) \to 0,\ n\to\infty \Leftrightarrow \mathbf{P}\left(\sup_{k,l\geqslant n}\|\xi_k-\xi_l\| \geqslant \varepsilon\right) \to 0,$$

$$n \to \infty,$$

что эквивалентно искомому утверждению.

1.5. **Сходимость рядов.** Пусть $\xi_1^{\alpha}, \ldots, \xi_n^{\alpha}, \ldots$ — последовательность независимых в совокупности с. в. со значениями в H, $S_n=S_n^{\alpha}=\xi_1^{\alpha}+\ldots+\xi_n^{\alpha}$.

Предложение 1.2 (Колмогоров—Хинчин). Пусть $\mathbf{E}\xi_i^{\alpha}=0$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\|\xi_i^{\alpha}\|^2<\infty$ и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\|\xi_i^{\alpha}\|^2$ сходится равномерно относительно α. Тогда

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^{\alpha}<\infty\right)=1$$

и сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i^{\alpha}$ равномерна по вероятности, т. е.

$$\mathbf{P}\left(\sup_{n\geqslant N}\|S_n^{\alpha}-S^{\alpha}\|>c\right) \rightrightarrows 0,\ N\to\infty \qquad (c>0),$$

где $\quad S^{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i^{\alpha}.$

Доказательство. Пусть $c>0$. Имеем

$$\mathbf{P}\left(\sup_{k\geqslant 1}\|S_{n+k}^{\alpha}-S_n^{\alpha}\|\geqslant c\right)=\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|S_{n+k}^{\alpha}-S_n^{\alpha}\|\geqslant c\right)\leqslant$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty} c^{-2}\sum_{k=n}^{n+N}\mathbf{E}\|\xi_k^{\alpha}\|^2=c^{-2}\sum_{k=n}^{\infty}\mathbf{E}\|\xi_k^{\alpha}\|^2 \quad .$$

(на втором шаге мы использовали неравенство Колмогорова), откуда

$$\sup_{\alpha}\mathbf{P}\left(\sup_{k\geqslant 1}\|S_{n+k}^{\alpha}-S_n^{\alpha}\|\geqslant c\right)\to 0, \qquad n\to\infty.$$

В силу предложения 1.1 отсюда следует искомое утверждение.

1.6. **Закон больших чисел.** Предложение 1.3. Пусть с. в. ξ_k^α, $k=1, 2, \ldots$ со значениями в H независимы в совокупности и удовлетворяют условиям

$$\sup_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\|\mathbf{E}\xi_k^\alpha\|/n\right)\leqslant\beta_\alpha\leqslant C<\infty, \tag{1.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}\|\xi_k^\alpha-\mathbf{E}\xi_k^\alpha\|^2/(\beta_\alpha^2 k^2)\leqslant C<\infty \tag{1.2}$$

и ряд в (1.2) сходится равномерно по α. Пусть

$$\mathscr{D}_\lambda=\mathscr{D}_\lambda^\alpha=\bigcap_{n\geqslant 1}(\|S_n^\alpha\|\leqslant\lambda\beta_\alpha n).$$

Тогда

$$\lim_{\lambda\to\infty}\inf_{\alpha}\mathbf{P}(\mathscr{D}_\lambda^\alpha)=1. \tag{1.3}$$

Доказательство удобно разбить на части. I (лемма Теплица). Пусть $a_n\geqslant 0$, $a_1>0$, $b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $b_n\to\infty$, $x_n^\alpha\rightrightarrows x^\alpha$ $(n\to\infty)$, $\|x_n^\alpha-x^\alpha\|\leqslant C$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}a_k x_k^\alpha/b_n\rightrightarrows x^\alpha.$$

В самом деле, выберем n_ε так, чтобы $\|x_n^\alpha-x^\alpha\|<\varepsilon/2$, $n\geqslant n_\varepsilon$, и $m_\varepsilon>n_\varepsilon$, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n_\varepsilon}a_k\|x_k^\alpha-x^\alpha\|/b_{m_\varepsilon}<\varepsilon/2.$$

Тогда $(n\geqslant m_\varepsilon)$

$$\left\|\left(\sum_{k=1}^{n}a_k x_k^\alpha/b_n\right)-x^\alpha\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k\|x_k^\alpha-x^\alpha\|/b_n=$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n_\varepsilon}a_k\|x_k^\alpha-x^\alpha\|/b_n\right)+\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n}a_k\|x_k^\alpha-x^\alpha\|/b_n\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n_\varepsilon}a_k\|x_k^\alpha-x^\alpha\|/b_{m_\varepsilon}\right)+\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n}a_k\|x_k^\alpha-x_\alpha\|/b_n\leqslant(\varepsilon/2)+$$

$$+(\varepsilon/2)=\varepsilon.$$

II (лемма Кронекера). Пусть $0<b_1<\ldots<b_n\to\infty$, $\sum_{k\geqslant 1}x_k^\alpha<\infty$, $\sup_{n\geqslant 1}\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k^\alpha\right\|\leqslant C$, и ряд $\sum_{k\geqslant 1}x_k^\alpha$ сходится равномерно по α. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}b_k x^\alpha{}_k/b_k\rightrightarrows 0,\quad n\to\infty.$$

Действительно, пусть $b_0=0$, $S_0=0$, $S_n=\sum_{k=1}^{n} x_k^\alpha$. Тогда (суммирование по частям)

$$\sum_{k=1}^{n} b_k x_k^\alpha = \sum_{k=1}^{n} b_k (S_k - S_{k-1}) = b_n S_n - b_0 S_0 - \sum_{k=1}^{n} S_{k-1} (b_k - b_{k-1}),$$

так что

$$\sum_{k=1}^{n} b_k x_k^\alpha / b_n = S_n - \sum_{k=1}^{n} S_{k-1} a_k / b_n \rightrightarrows 0$$

в силу (I) (здесь $a_k = b_k - b_{k-1}$), что и доказывает лемму.

III (вероятностный вариант леммы Теплица). Пусть $a_n \geqslant 0$, $a_1 > 0$, $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $b_n \to \infty$ и для всякого $c>0$

$$\mathbf{P}(\|\xi_n^\alpha - \xi^\alpha\| > c) \rightrightarrows 0, \quad n \to \infty,$$

$\sup\limits_n P(\|\xi_n^\alpha - \xi^\alpha\| > C) \rightrightarrows 0$, $C \to \infty$. Тогда для всякого $c>0$

$$\mathbf{P}\left(\left\|\xi^\alpha - \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^\alpha / b_n\right\| > c\right) \rightrightarrows 0, \quad n \to \infty,$$

Действительно, пусть n_ε таково, что при $n \geqslant n_\varepsilon$

$$\mathbf{P}(\|\xi_n^\alpha - \xi^\alpha\| \geqslant c/2) \leqslant \varepsilon/2 \quad (\varepsilon > 0)$$

и $m_\varepsilon > n_\varepsilon$ таково, что

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_k \|\xi_k^\alpha - \xi^\alpha\| / b_{m_\varepsilon} \geqslant c/2\right) \leqslant \varepsilon/2.$$

Тогда при $n \geqslant m_\varepsilon$ имеем (ср. с п. I)

$$\mathbf{P}\left(\left\|\xi^\alpha - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^\alpha / b_n\right)\right\| \geqslant c\right) \leqslant \varepsilon.$$

IV (вероятностный вариант леммы Кронекера). Пусть $0 < b_1 < \ldots < b_n \to \infty$, $\sum_{k \geqslant 1} \xi_k^\alpha < \infty$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^\alpha$ сходится равномерно по вероятности, т. е. $\mathbf{P}(\sup\limits_{n \geqslant N} \|S_n^\alpha - S^\alpha\| > c) \rightrightarrows 0$, $N \to \infty$, где $S^\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^\alpha$, $c > 0$ и $\sup\limits_n P(\|\xi_n^\alpha - \xi^\alpha\| > C) \rightrightarrows 0$, $C \to \infty$. Тогда для всякого $c>0$ $\mathbf{P}\left(\sup\limits_{n \geqslant N} \left\|\sum_{k=1}^{n} b_k \xi_k^\alpha / b_n\right\| > c\right) \rightrightarrows 0$, $N \to \infty$.

В самом деле (см. п. II),

$$\mathbf{P}\left(\sup_{n\geqslant N}\left\|\sum_{k=1}^{n} b_k\xi_k^\alpha/b_n\right\|>c\right)\leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{n\geqslant N}\|S_n^\alpha-S^\alpha\|>c/2\right)+$$
$$+\mathbf{P}\left(\sup_{n\geqslant N}\left\|S^\alpha-\sum_{k=1}^{n} S_{k-1}^\alpha a_k/b_k\right\|>c/2\right),$$

где $a_k=b_k-b_{k-1}$. В силу п. III и условия правая часть здесь равномерно стремится к нулю при $N\to\infty$.

V. Имеем

$$\frac{S_n^\alpha-\mathbf{E}\,S_n^\alpha}{n\beta_\alpha}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{\xi_k^\alpha-\mathbf{E}\xi_k^\alpha}{k\beta_\alpha}\right).$$

В силу предложения 2.2 и равномерной сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}\|\xi_k^\alpha-\mathbf{E}\xi_k^\alpha\|^2/(k^2\beta_\alpha^2)\ \text{ряд}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k^{\alpha}-\mathbf{E}\xi_k^\alpha}{k\beta_\alpha}$$

сходится равномерно по вероятности. В силу п. IV отсюда следует

$$\mathbf{P}\left(\sup_{n\geqslant N}\left\|\frac{S_n^\alpha-\mathbf{E}\,S_n^\alpha}{n\beta_\alpha}\right\|>c\right)\rightrightarrows 0,\quad N\to\infty\quad (c>0).$$

Пусть $\varepsilon>0$. Выберем такое N, что

$$\sup_\alpha \mathbf{P}\left(\sup_{n\geqslant N}\left\|\frac{S_n^\alpha-\mathbf{E}\,S_n^\alpha}{n\beta_\alpha}\right\|>1\right)\leqslant\varepsilon/2.$$

Тогда в силу условия (1.1)

$$\inf_\alpha \mathbf{P}\left(\|S_n^\alpha\|\leqslant 2n\beta_\alpha,\ n\geqslant N\right)\geqslant 1-\varepsilon/2.$$

Далее, выберем такое $\lambda_1>0$, что

$$\sup_\alpha \mathbf{P}\left(\sup_{k\leqslant N}\|S_k^\alpha\|>\lambda_1\right)\leqslant\varepsilon/2.$$

Такой выбор возможен в силу условий (1.1) и (1.2). Тогда при $\lambda\geqslant\max(2,\lambda_1)$ получаем

$$\inf_\alpha \mathbf{P}(\mathscr{D}_\lambda^\alpha)\geqslant 1-\varepsilon.$$

Предложение 1.3 доказано.

1.7. **Марковские моменты.** Пусть $(\mathscr{F}_t,\ t\geqslant 0)$ — поток неубывающих σ-алгебр на $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$. С. в. τ на нем же называется марковским моментом относительно потока $(\mathscr{F}_t)$, если при всяком t справедливо включение $(\omega\colon\tau(\omega)>t)\in\mathscr{F}_t$.

Отметим простое свойство марковских моментов: если τ — марковский момент (м. м.), то $\tau\wedge t=\min(\tau, t)$ — также м. м. при любом $t\geqslant 0$. В самом деле, если $t>s$, то $(\tau\wedge t\leqslant s)=\varnothing\in\mathscr{F}_s$, а если $t\leqslant s$, то $(\tau\wedge t\leqslant s)=\Omega\setminus(\tau>s)\in\mathscr{F}_s$.

1.8. **Мартингалы и супермартингалы.** Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ задан поток вложенных σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)$: $\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}$ при всяких $s\leqslant t$ и случайный процесс ξ со значениями в R^1, измеримый относительно этого потока, т. е. задано семейство с. в. ξ_t, $t\geqslant 0$, при каждом t измеримых относительно $\mathscr{F}_t$. Поток $(\xi_t, \mathscr{F}_t)$ называется мартингалом, если при всех $0\leqslant s\leqslant t$

$$\xi_s=\mathbf{E}(\xi_t|\mathscr{F}_s),$$

и супермартингалом, если при всех $0\leqslant s\leqslant t$

$$\xi_s\geqslant\mathbf{E}(\xi_t|\mathscr{F}_s).$$

1.9. **Остановленные супермартингалы.** Предложение 1.4 (см., например, [78]). Пусть $\xi_t, \mathscr{F}_t)$ — супермартингал (мартингал), τ — марковский момент относительно потока $(\mathscr{F}_t)$. Тогда $(\xi_{t\wedge\tau}, \mathscr{F}_t)$ — также супермартингал (мартингал).

Пусть последовательность $(X_n, \mathscr{F}_n^X)$ образует мартингал, $X_0=0$, и $\mathbf{E}(|X_{n+1}-X_n|^2|\mathscr{F}_n^X)\leqslant\varepsilon^2$. Тогда

$$\mathbf{E}X_n=0, \qquad \mathbf{E}X_n^2\leqslant\varepsilon^2 n.$$

Пусть τ — марковский момент относительно $(\mathscr{F}_n^X)$, $\mathbf{P}(\tau<\infty)=1$. Нас интересует, справедливы ли соотношения

$$\mathbf{E}X_\tau=0, \qquad \mathbf{E}X_\tau^2\leqslant\varepsilon^2\mathbf{E}\tau. \tag{1.4}$$

Предложение 1.5. Пусть $(X_n, \mathscr{F}_n^X)$ — мартингал, $X_0=0$, $\mathbf{E}(|X_{n+1}-X_n|^2|\mathscr{F}_n^X)\leqslant\varepsilon^2$ ($\mathbf{P}$ — п. н.). Тогда имеет место соотношение

$$\mathbf{E}X_\tau^2\leqslant\varepsilon^2\mathbf{E}\tau. \tag{1.5}$$

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_{n+1}^2&-\varepsilon^2(n+1))-(X_n^2-\varepsilon^2 n)|\mathscr{F}_n^X)=\\&=\mathbf{E}((X_n+(X_{n+1}-X_n))^2-X_n^2-\varepsilon^2|\mathscr{F}_n^X)=\\&=\mathbf{E}((X_{n+1}-X_n)^2+2X_n(X_{n+1}-X_n)-\varepsilon^2|\mathscr{F}_n^X)\leqslant 0,\end{aligned}$$

то $(X_n^2-\varepsilon^2 n, \mathscr{F}_n^X)$ — супермартингал. Значит, в силу предложения 1.4 $(X_{n\wedge\tau}-\varepsilon^2(n\wedge\tau), \mathscr{F}_n^X)$ — также супермартингал, поэтому

$$\mathbf{E}(X_{n\wedge\tau}^2-(n\wedge\tau)\varepsilon^2)\leqslant\mathbf{E}(X_{(n-1)\wedge\tau}^2-((n-1)\wedge\tau)\varepsilon^2)\leqslant\ldots\leqslant 0,$$

т. е.

$$\mathbf{E}X_{n\wedge\tau}^2\leqslant\varepsilon^2\mathbf{E}(n\wedge\tau), \quad n\geqslant 0.$$

Отсюда

$$\mathbf{E}X_{n\wedge\tau}^2\leqslant\varepsilon^2\mathbf{E}\tau,$$

и в силу леммы Фату получаем искомое неравенство (1.5). Предложение 1.5 доказано.

Предложение 1.6. (Дуб). Пусть $(X_n, \mathscr{F}_n^x)$ — супермартингал (мартингал), τ — марковский момент, $\mathbf{P}(\tau<\infty)=1$,

$\mathbf{E}|X_\tau|<\infty$, $\varliminf_{n\to\infty} \int_{\tau>n} |X_n|\,d\mathbf{P}=0$. Тогда

$$\mathbf{E}X_\tau \underset{(=)}{\leqslant} X_0 \quad (\mathbf{P}\text{ — п. н.}).$$

Предложение 1.7. (см. [78]). Пусть $(X_n, \mathscr{F}_n^x)$ — супермартингал (мартингал), τ — марковский момент, $\mathbf{E}\tau<\infty$, и для всякого $n\geqslant 0$ и некоторого $C>0$

$$\mathbf{E}(|X_{n+1}-X_n|\,|\,\mathscr{F}_n^X)\leqslant C \quad (\mathbf{P}\text{ — п. н.}).$$

Тогда $\mathbf{E}|X_\tau|<\infty$ и

$$\mathbf{E}X_\tau \underset{(=)}{\leqslant} X_0.$$

2. Помехоустойчивость при случайных возмущениях: сходимость по вероятности

2.1. Пусть для решения задачи

$$Au=f \tag{2.1}$$

применяется схема

$$\tilde{u}_n=\tilde{u}_{n-1}-A_\eta^* A_\eta \tilde{u}_{n-1}+A_\eta^* f_\delta+w_n,\ n\geqslant 1. \tag{2.2}$$

Все результаты этого и следующего разделов сохраняются и для более общей схемы вида (4.23) гл. IV, но усложняются некоторые выкладки. Ради простоты изложения мы ограничиваемся случаем (2.2). Пространство H, как уже говорилось, предполагается сепарабельным, w_n — случайные величины со значениями в H.

2.2. **Оценки скорости сходимости и числа итераций.** Пусть с. в. w_n, $n\geqslant 1$, независимы в совокупности, имеют конечный второй момент, $\mathbf{E}\|w_n\|^2<\infty$, и

$$\sup_{n\geqslant 1}\left\|\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}w_k\right\|\Big/n\leqslant\varepsilon\leqslant 1. \tag{2.3}$$

Предполагается, что ошибки w_n зависят от малого параметра ε и при этом ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}\|w_k-\mathbf{E}w_k\|^2/(\varepsilon^2k^2)\leqslant C<\infty \tag{2.4}$$

сходится равномерно при $\varepsilon\leqslant 1$. Для такой равномерной сходимости достаточно, например, чтобы выполнялись неравенства

$$\mathbf{E}\|w_k-\mathbf{E}w_k\|^2\leqslant\varepsilon^2, \qquad k\geqslant 1.$$

Предполагается, что $\|A_\eta\|$, $\|A\|\leqslant 1$,

$$\|A_\eta-A\|\leqslant\eta\leqslant 1,\ \|f_\delta-f\|\leqslant\delta\leqslant 1.$$

Таблица 1

Π_0	$\mu = a_1\delta + a_2\eta$ $m = \inf (n \geqslant 1\colon \|\tilde{u}_n - \tilde{u}_{n-1}\| \leqslant \mu)$
Π_1	$\mu = b_1\delta + b_*\eta$ $m = \inf (n \geqslant 0\colon \|A_\eta \hat{u}_n - f_\delta\| \leqslant \mu)$
Π_2	$\mu_n = b_1\delta + b_2\eta \|\tilde{u}_n\|$ $m = \inf (n \geqslant 0\colon \|A_\eta \tilde{u}_n - f_\delta\| \leqslant \mu_n,$ либо $n \geqslant a\mu_n^{-2}$
Π_0'	$\mu = a_1\delta + a_2\eta$ $m = \inf (n \geqslant 1)\colon (n - [n/2])^{-1} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}_{[n/2]}\| \leqslant \mu$
Π_1'	$\mu = b_1\delta + b_*\eta$ $m = \inf (n \geqslant 1\colon (n - [n/2])^{-1} \left\| \left(A_\eta \sum_{k=[n/2]+1}^{n} \tilde{u}_k \right) - (n - [n/2]) f_\delta \right\| \leqslant \mu$
Π_2'	$\mu_n = b_1\delta + b_2\eta (n - [n/2])^{-1} \sum_{k=[n/2]+1}^{n} \|\tilde{u}_k\|$ $m = \inf (n \geqslant 1\colon [n - [n/2])^{-1} \left\| \left(A_\eta \sum_{k=[n/2]+1}^{n} \tilde{u}_k \right) - (n - [n/2]) f_\delta \right\| \leqslant \mu_n$ либо $n \geqslant a\mu_n^{-2})$

Уравнение (2.1) предполагается разрешимым. Исследуются следующие правила останова (табл. 1), где m — момент останова, a_1, a_2, $a > 0$, b_1, $b_2 > 1$, $b_* > \|u_*\|$, $\inf \varnothing = \infty$, $\tilde{u}_\infty = 0$).

Например, правило (Π_0) останавливает процедуру на шаге с таким номером $n \geqslant 1$, при котором впервые выполнено неравенство $\|\tilde{u}_n - \tilde{u}_{n-1}\| \leqslant \mu$.

Регуляризация устанавливается при следующих соотношениях между малыми параметрами ($c > 0$) (табл. 2).

Таблица 2

Π_0	$\varepsilon \leqslant c (\delta + \eta)^2$
Π_1	$\varepsilon \leqslant c (\delta + \eta)^3$
Π_2	$\varepsilon \leqslant c (\delta + \eta)^3$
Π_0'	$\varepsilon = o ((\delta + \eta) / \lvert \ln (\delta + \eta) \rvert)$
Π_1'	$\varepsilon \leqslant c (\delta + \eta)^2$
Π_2'	$\varepsilon \leqslant c (\delta + \eta)^2$

Пусть $W_n = W_n^{\varepsilon} = \sum_{k=1}^{n} \omega_k$, $\mathscr{D}_\lambda = \mathscr{D}_\lambda^{\varepsilon} = (\omega\colon \|W_n\| \leqslant \lambda \varepsilon n,\ n = 1, 2, \ldots)$.

В силу предложения 1.3

$$\inf_{\varepsilon} \mathbf{P}(\mathscr{D}_\lambda^{\varepsilon}) \to 1, \quad \lambda \to \infty. \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. При всяком $\lambda > 0$ для правил (Π_0) и (Π_0') справедливо соотношение

$$\lim_{\delta,\eta\to 0} I(\mathscr{D}_\lambda)(\delta + \eta) m = 0, \tag{2.6}$$

а для правил $(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_1', \Pi_2')$

$$\lim_{\delta,\eta\to 0} I(\mathscr{D}_\lambda)(\delta + \eta)^2 m = 0. \tag{2.7}$$

Теорема 2.2. При всяком $\lambda > 0$ для всех правил останова $(\Pi_0 - \Pi_2')$

$$\lim_{\delta,\eta\to 0} I(\mathscr{D}_\lambda) \|\tilde{u}_m - u_*\| = 0. \tag{2.8}$$

Теорема 2.3. Пусть $\tilde{u}_0 - u_* = |A|^p v$, $p > 0$, $\|v\| \leqslant r$. Тогда при всех $\lambda > 0$ и достаточно малых δ и η для правил (Π_0, Π_0') справедливы соотношения

$$I(\mathscr{D}_\lambda) \|\tilde{u}_m - u_*\| \leqslant C_{p,r} (\delta + \eta)^{p/(p+2)}, \tag{2.9}$$

$$I(D_\lambda) m \leqslant C'_{p,r} (\delta + \eta)^{-2/(p+2)}, \tag{2.10}$$

а для правил $(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_1', \Pi_2')$

$$I(\mathscr{D}_\lambda) \|\tilde{u}_m - u_*\| \leqslant C''_{p,r} (\delta + \eta)^{p/(p+1)}, \tag{2.11}$$

$$I(\mathscr{D}_\lambda) m \leqslant C'''_{p,r} (\delta + \eta)^{-2/(p+1)}. \tag{2.12}$$

Как и в детерминированном случае, для каждого конкретного $\tilde{u}_0 - u_*$ оценки и сходимость несколько лучше: для правил (Π_0, Π'_0)

$$\lim_{\delta,\eta\to 0} I(\mathscr{D}_\lambda) \|\tilde{u}_m - u_*\| (\delta + \eta)^{-p/(p+2)} = 0, \tag{2.13}$$

$$\lim_{\delta,\eta\to 0} I(\mathscr{D}_\lambda) m (\delta + \eta)^{2/(p+2)} = 0, \tag{2.14}$$

а для правил $(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_1', \Pi_2')$

$$\lim_{\delta,\eta\to 0} I(\mathscr{D}_\lambda) \|\tilde{u}_m - u_*\| (\delta + \eta)^{-p/(p+1)} = 0, \tag{2.15}$$

$$\lim_{\delta,\eta\to 0} I(\mathscr{D}_\lambda) m (\delta + \eta)^{2/(p+1)} = 0. \tag{2.16}$$

С одной стороны, в силу (2.5) на все соотношения (2.6)—(2.16) можно смотреть как на некоторые утверждения о сходимости по вероятности. С другой стороны, при доказательстве их будет использовано только определение множеств $\mathscr{D}_\lambda$ и никакие вероятностные результаты привлекаться уже не будут. Поэтому соотношения (2.6)—(2.16) можно трактовать и в чисто детерминированном смысле: если $\|W_n\| \leqslant \lambda\varepsilon n$ при всех $n \geqslant 1$, то справедливы эти соотношения.

При несколько более жестких предположениях на помехи можно вместо закона больших чисел использовать закон повторного логарифма. Например, пусть $\mathbf{E}w_n = 0$, $\mathbf{E}\|w_n\|^2 \leqslant \varepsilon^2$, $n \geqslant 1$, с. в. w_n незавйсимы в совокупности и множества $\mathscr{D}_\lambda'$ определяются следующим образом: $\mathscr{D}_\lambda' = (\omega\colon \|W_n\| \leqslant \lambda\varepsilon\sqrt{n \ln\ln n},\ n \geqslant 1)$. Тогда справедливо соотношение $\inf\limits_{\text{в}} \mathbf{P}(\mathscr{D}_\lambda') \to 1$, $\lambda \to \infty$, и можно, по-видимому, получить результаты теорем 2.1—2.3 при меньших ограничениях на величину ε.

2.3. **Вспомогательные утверждения.** Пусть $q_n = \tilde{u}_n - u_*$, $B_\eta = I - A_\eta^* A_\eta$, $B = I - A^*A$, $s_n = A_\eta \tilde{u}_n - f_\delta$, $r_n = \tilde{u}_{n-1} - \tilde{u}_n$, $\rho_n = (n - [n/2])^{-1}(\tilde{u}_{[n/2]} - \tilde{u}_n)$, $\zeta_n = \left(A_\eta \sum\limits_{k=[n/2]+1}^{n} \tilde{u}_k - (n - [n/2]) f_\delta\right) / (n - [n/2])$.

Лемма 2.1. (ср. с (4.28), (4.34) гл. IV). Справедливы соотношения (здесь считается $W_{-k} \equiv 0$ при $k \geqslant 0$, $\hat{B}_\eta = I - A_\eta A_\eta^*$)

$$q_n = B_\eta^n q_0 = \sum_{k=0}^{n-1} B_\eta^k A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u_*) + W_n - \\ - B_\eta^{n-1} W_1 - \sum_{k=1}^{n} (B_\eta^{n-k+1} - B_\eta^{n-k}) W_k, \tag{2.17}$$

$$s_n = A_\eta B_\eta^n q_0 - \hat{B}_\eta^n (f_\delta - A_\eta u_*) + A_\eta (W_n - B_\eta^{n-1} W_1) - \\ - \sum_{k=1}^{n} A_\eta (B_\eta^{n-k+1} - B_\eta^{n-k}) W_k, \tag{2.18}$$

$$(n - [n/2]) \zeta_n = \sum_{k=[n/2]+1}^{n} (A_\eta B_\eta^k q_0 - \hat{B}_\eta^k (f_\delta - A_\eta u_*)) + \\ + \sum_{k=0}^{n-1} A_\eta B_\eta^k (W_{n-k-1} - W_{[n/2]-k}), \tag{2.19}$$

$$r_n = B_\eta^n (I - B_\eta) q_0 - B_\eta^n A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u_*) - w_n + \\ + (I - B_\eta)(W_n - B_\eta^{n-1} W_1) - \sum_{k=1}^{n} (I - B_\eta)(B_\eta^{n-k+1} - B_\eta^{n-k}) W_k, \tag{2.20}$$

$$(n - [n/2]) \rho_n = (B_\eta^{n+1} - B_\eta^{[n/2]+1}) q_0 + \\ + \sum_{k=[n/2]+1}^{n} B_\eta^k A_\eta (f_\delta - A_\eta u_*) - (W_n - W_{[n/2]}) + \\ + \sum_{k=0}^{n-1} B_\eta^k (I - B_\eta)(W_{n-k-1} - W_{[n/2]-k-1}); \tag{2.21}$$

Первые два равенства леммы получаются из (4.28) и (4.34) гл. IV с помощью суммирования по частям, остальные следуют из них или доказываются аналогично.

Лемма 2.2. Справедливы неравенства

$$\|A_\eta(B_\eta^{k+1}-B_\eta^k)\| \leqslant (3/2)^{3/2}(k+3/2)^{-3/2}, \quad k \geqslant 0, \tag{2.22}$$

$$\|(I-B_\eta)(B_\eta^{k+1}-B_\eta^k)\| \leqslant 4(k+2)^{-2}, \quad k \geqslant 0. \tag{2.23}$$

Лемма 2.3. Для всякого $\lambda>0$ найдется такое $C>0$, что выполнены неравенства

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\|q_n\| \leqslant I(\mathscr{D}_\lambda)(\|B_\eta^n q_0\| + n^{1/2}(\delta+\eta\|u_*\|) + Cn\varepsilon), \tag{2.24}$$

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\|s_n - A_\eta B_\eta^n q_0\| \leqslant I(\mathscr{D}_\lambda)(\delta+\eta\|u_*\|) + Cn\varepsilon), \tag{2.25}$$

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\left\|(n-[n/2])\zeta_n - \sum_{k=[n/2]+1}^{n} A_\eta B_\eta^k q_0\right\| \leqslant$$
$$\leqslant I(\mathscr{D}_\lambda)((n-[n/2])(\delta+\eta\|u_*\|) + Cn^{3/2}\varepsilon), \tag{2.26}$$

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\|r_n - B_\eta(I-B_\eta)q_0\| \leqslant I(\mathscr{D}_\lambda)(n^{-1/2}(\delta+\eta\|u_*\|) + Cn\varepsilon), \tag{2.27}$$

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\|(n-[n/2])\rho_n - (B_\eta^{n+1} - B_\eta^{[n/2]+1})q_0\| \leqslant$$
$$\leqslant I(\mathscr{D}_\lambda)(n^{1/2}(\delta+\eta\|u_*\|) + C\varepsilon n\ln n). \tag{2.28}$$

Эти оценки следуют из предыдущих двух лемм. Например, слагаемое $Cn\varepsilon$ в (2.27) возникает из оценок

$$\|w_n\| = \|W_n - W_{n-1}\| \leqslant 2\lambda n\varepsilon,$$

$$\|(I-B_\eta)(W_n - B_\eta^{n-1}W_1)\| \leqslant \lambda(n+1)\varepsilon,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\|(I-B_\eta)(B_\eta^{n-k+1}-B_\eta^{n-k})\|\|W_k\| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda n\varepsilon\sum_{k=1}^{n}4(n-k+2)^{-2} \leqslant 4\lambda n\varepsilon\sum_{k=2}^{\infty}k^{-2}.$$

Слагаемое $C\varepsilon n\ln n$ в (2.28) возникает из неравенств

$$\|W_n - W_{[n/2]}\| \leqslant 2\lambda\varepsilon n,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|B_\eta^k(I-B_\eta)\|\|W_{n-k-1} - W_{[n/2]+k-1}\| \leqslant$$
$$\leqslant 2\lambda n\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^{-1} \leqslant 2\lambda\varepsilon n\ln n.$$

Лемма 2.4. (см. леммы 2.1 и 3.2 гл. IV). При всяком $x \in N(A^*A)^\perp$ имеют место равенства

$$\lim_{\eta\to 0, n\to\infty}\|B_\eta^n x\| = 0,$$

$$\lim_{\eta\to 0, n\to\infty} n\| B_\eta^n (I - B_\eta) x\| = 0,$$

$$\lim_{\eta\to 0, n\to\infty} n^{1/2}\| A_\eta B_\eta^n x\| = 0.$$

Лемма 2.5. Если $Bx=0$, то

$$\lim_{\eta\to 0} \sup_{n\geqslant 1} \| B_\eta^n x\| = 0.$$

В самом деле, имеем

$$| B_\eta^n x\| \leqslant \| B_\eta x\| = \|(B_\eta - B) x\| \leqslant 2\eta \| x\| \to 0, \ \eta \to 0.$$

2.4. Доказательство теоремы 2.1. Случай (Π_0'). Пусть $u^0{}_{n+1} = u_n{}^0 - A_\eta{}^* A_\eta u_n{}^0 + A_\eta{}^* f_\delta$, $u_0{}^0 = \tilde{u}_0$, $r_n{}^0 = u^0{}_{n-1} - u_n{}^0$, $\rho_n{}^0 = (n - [n/2])^{-1} (u^0{}_{[n/2]} - u_n{}^0)$, $m^0 = \inf (n \geqslant 1 : \|\rho_n{}^0\| \leqslant \mu_0 \equiv \mu/2)$. При $n < m^0$ выполняется неравенство $\rho_n{}^0 > \mu_0$. Поэтому в силу (2.28)

$$(m^0 - 1 - [(m^0 - 1)/2])\, \mu_0 < \| u^0_{[n/2]} - u^0_n \| \leqslant$$
$$\leqslant \| (B_\eta^{m^0} - B_\eta^{[(m^0-1)/2]+1})\, q_0 \| + (m^0)^{1/2} (\delta + \eta \| u_* \|),$$

если $m^0 < \infty$. Если m^0 достаточно велико, $m^0 > K_\nu$, то первое слагаемое в правой части мало в силу леммы 2.4, а второе мало по сравнению с $(m^0 - 1 - [(m^0 - 1)/2])\mu_0$. Стало быть, $m^0\mu_0$ мало, а именно $m^0\mu_0 < \nu$, если $m^0 > K_\nu$. Если $m^0 \leqslant K_\nu$, то $m^0\mu_0 \leqslant K_\nu \mu_0 \to 0$ при δ, $\eta \to 0$. Итак, в любом случае

$$m^0\mu_0 \to 0, \qquad \delta,\ \eta \to 0. \tag{2.29}$$

Поскольку при достаточно больших

$$(n - 1 - [(n - 1)/2])\, \mu_0 > \| (B_\eta^n - B_\eta^{[(n-1)/2]+1})\, q_0 \| + n^{1/2} (\delta + \eta \| u_* \|),$$

то всегда $m^0 < \infty$.

В силу (2.28), (2.29) и условия из табл. 2 при всяком $\lambda > 0$

$$I(\mathscr{D}_\lambda) \|\rho_{m^0}\| \leqslant (\mu/2) + C\varepsilon \ln m^0 =$$
$$= (\mu/2) + C(\varepsilon |\ln (\delta + \eta)| / (\delta + \eta))\, (\delta + \eta) \times$$
$$+ (\ln m^0 / |\ln (\delta + \eta)|) \leqslant \mu$$

при достаточно малых δ, η. Отсюда

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\, m \leqslant m^0 \qquad (\delta,\ \eta \to 0),$$

стало быть

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\, m\mu \to 0 \qquad (\delta,\ \eta \to 0).$$

Аналогично рассматривается случай (Π_0).

Случай (Π_1'). Пусть $\mu_0 = \varkappa\mu$, $0 < \varkappa < 1$, $\varkappa b_1 > 1$, $\varkappa b_* > \|u_*\|$. В силу (2.26) имеем

$$(m^0 - 1 - [(m^0 - 1)/2])\, \mu_0 <$$
$$< (m^0 - 1 - [(m^0 - 1)/2])\, (\| A_\eta B_\eta^{[(m^0+1)/2]} q_0 \| + \delta + \eta \| u_* \|),$$

если $m^0 < \infty$. Отсюда в силу леммы 2.4 и выбора μ_0 получаем

$$m^0\mu_0 \to 0, \qquad \eta \to 0$$

как при $m^0 \to \infty$, так и в противном случае. Как и выше, получаем, что всегда $m^0 < \infty$, поскольку при достаточно больших n выполняется неравенство

$$(n-[n/2])\,\mu_0 > (n-[n/2])^{1/2}\|q_0\| +$$
$$+(n-[n/2])(\delta+\eta\|u_*\|) \geqslant \sum_{k=[n/2]+1}^{n} \|\zeta_k\|.$$

Далее, в силу (2.26) и условия из табл. 2

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\|\zeta_{m^0}\| + C(m^0)^{3/2}\,\varepsilon/(m^0-[m^0/2]) \leqslant \mu_0 + C(m^0)^{1/2}(\delta+\eta)\,\mu \leqslant \mu$$

при достаточно малых η, δ. Стало быть,

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\,m \leqslant m^0, \qquad \delta,\ \eta \to 0.$$

Аналогично рассматривается случай (Π_1).

Правила (Π_2, Π_2') будут рассмотрены чуть позже, при доказательстве теоремы 2.2.

2.5. Доказательство теоремы 2.2. Рассмотрим случай (Π_0) Пусть $Bq_0 \neq 0$. Тогда при условии $\|W_n\| \leqslant \lambda\varepsilon n$, $n \geqslant 1$ в силу (2.27) имеем $m \to \infty$ (δ, $\eta \to 0$). Короче без всякого условия этот факт можно записать в виде

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\,m^{-1} \to 0, \quad \delta,\ \eta \to 0. \tag{2.30}$$

Докажем это соотношение подробно. Поскольку B — самосопряженный оператор, то из $Bq_0 \neq 0$, следует $B^n q_0 \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. В силу (2.27) при всяком $n \geqslant 1$ имеем

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\,r_n \to I(\mathscr{D}_\lambda)\,B^n(I-B)\,q_0, \quad \delta,\ \eta \to 0.$$

По определению нормального решения $q_0 \in N(A^*A)^\perp$ и, значит, $B^n q_0 \in N(A^*A)^\perp$, $n \geqslant 1$ (если, например, $Bq_0 = u+v$, $u \in N(A^*A)$, $v \in N(A^*A)^\perp$, то $B^2 q_0 = u + Bv$ и $\langle u, u\rangle = \langle Bq_0 - v, Bq_0 - v\rangle = \langle B^2 q_0 - Bv, q_0\rangle - \langle Bq_0 - v, v\rangle = \langle u, q_0\rangle - \langle u, v\rangle = 0 - 0 = 0$). Далее, нуль не является собственным значением сужения оператора A^*A на инвариантное подпространство $N(A^*A)$. Поэтому $B^n(I-B)\,q_0 \neq 0$, $n \geqslant 1$. Стало быть, ни при каком фиксированном n при достаточно малых δ, η и при условии $\mathscr{D}_\lambda$ останова быть не может, а это и означает справедливость соотношения (2.30).

Из (2.30) в силу леммы 2.4 следует

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\,\|B_\eta^{\,m} q_0\| \to 0, \quad \delta,\ \eta \to 0.$$

Далее, в силу теоремы 2.1 и условия из табл. 2 справедливы соотношения

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\,m^{1/2}(\delta + \eta\|u_*\|) \to 0, \quad \delta,\ \eta \to 0,$$
$$I(\mathscr{D}_\lambda)\,m\varepsilon \leqslant cI(\mathscr{D}_\lambda)\,m(\delta+\eta)^2 \to 0, \quad \delta,\ \eta \to 0.$$

Поэтому в силу (2.24) получаем

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\|q_m\| \leqslant I(\mathscr{D}_\lambda)(\|B_\eta^m q_0\| + m^{1/2}(\delta + \eta\|u_*\|) + C\varepsilon m) \to 0,\ \delta,\ \eta \to 0.$$

Пусть $Bq_0 = 0$. Тогда в силу леммы 2.5 $\|B_\eta{}^m q_0\| \to 0$, δ, $\eta \to 0$ и, значит, вновь в силу (2.24) находим

$$\varlimsup_{\delta,\eta\to 0} I(\mathscr{D}_\lambda)\|q_m\| \leqslant \varlimsup_{\delta,\eta\to 0} I(\mathscr{D}_\lambda)(m^{1/2}(\delta + \eta\|u_*\| + Cm\varepsilon) = 0.$$

Случай (Π_0'). В силу теоремы 2.1 имеем

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\,(m^{1/2}(\delta + \eta\|u_*\|) + Cm\varepsilon) \to 0, \quad \delta,\ \eta \to 0. \tag{2.31}$$

Поэтому в силу (2.24)

$$\varlimsup_{\delta,\eta\to 0} I(\mathscr{D}_\lambda)\|q_m\| = \varlimsup_{\delta,\eta\to 0} I(\mathscr{D}_\lambda)\|B_\eta^m q_0\|. \tag{2.32}$$

Как и выше, если $Bq_0 \neq 0$, то выполнено соотношение (2.30), и тогда $I(\mathscr{D}_\lambda)\|B_\eta{}^m q_0\| \to 0$ в силу леммы 2.4. Если же $Bq_0 = 0$, то $\|B_\eta{}^m q_0\| \to 0$ в силу леммы 2.5.

Случай (Π_1). В силу теоремы 2.1 справедливы соотношения (2.31), (2.32). Дальнейшее рассуждение повторяют случай (Π_0'). Аналогично рассматривается случай (Π_1').

Случай (Π_2) для теорем 2.1 и 2.2. Введем более детальные обозначения: пусть $m_1(\delta, \eta, \varepsilon, b_1, b_*)$ и $m_2(\delta, \eta, \varepsilon, b_1, b_2, a)$ — моменты останова соответственно для правил (Π_1) и (Π_2). Убедимся в справедливости соотношения

$$I(\mathscr{D}_\lambda)m_2(\delta, \eta, \varepsilon, b_1, b_2, a) \leqslant I(\mathscr{D}_\lambda)m_1(\delta, \eta, \varepsilon, b_1, b_{**}) \tag{2.33}$$

при $b_{**} > \|u_*\|b_2$ и достаточно малых δ, η. В силу доказанного для (Π_1) имеем

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\,b_2\|u_{m_1(\delta,\eta,\varepsilon,b_1,b_{**}}\| < b_{**}$$

при достаточно малых δ, η. Поэтому

$$b_1\delta + b_2 I(\mathscr{D}_\lambda)\|u_{m_1(\delta,\eta,\varepsilon,b_0,b_{**})}\|\eta \leqslant b_1\delta + b_{**}\eta \qquad (\delta,\ \eta \to 0).$$

Значит, действительно при δ, $\eta \to 0$ имеет место соотношение (2.33). Отсюда сразу вытекает утверждение теоремы 2.1 для правила (Π_2). Далее, в силу теоремы 2.1 и условия из табл. 2 (мы опускаем индексы у m_2 и m_1)

$$\lim_{\delta,\eta\to 0} I(\mathscr{D}_\lambda)\,(m_2^{1/2}(\delta + \eta\|u_*\|) + Cm_2\varepsilon = 0,$$

поэтому

$$\varlimsup_{\delta,\eta\to 0} I(\mathscr{D}_\lambda)\|q_{m_2}\| = \varlimsup_{\delta,\eta\to 0} I(\mathscr{D}_\lambda)\|B_\eta^{m_2} q_0\|.$$

Если $Bq_0 \neq 0$, то из (2.25) следует соотношение (2.30), откуда

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\|B_\eta{}^{m_2} q_0\| \to 0, \quad \delta,\ \eta \to 0.$$

Если $Bq_0 = 0$, то $\|B_\eta{}^{m_2} q_0\| \to 0$ ($\eta \to 0$) в силу леммы 2.5.

Случай (Π_2') рассматривается аналогично: для него также проверяется справедливость соотношения (2.33).

2.6. Лемма 2.6. Пусть $Bq_0=0$. Тогда для всех правил останова (Π_0—Π_2') найдется такая постоянная $K=K(\|q_0\|, \|u_*\|)>0$, что

$$I(\mathscr{D}_\lambda;\ m>K)\to 0, \qquad \delta,\ \eta\to 0.$$

Доказательство. Случай (Π_0). В силу леммы 2.3 и условия имеем при $n\geqslant 1$

$$\|r_n^0\|\leqslant\|B_\eta^n(I-B_\eta)\,q_0\|+\|B_\eta^n A_\eta^*(f_\delta-A_\eta u_*)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|A_\eta^* A_\eta B_\eta^{n-1}(B_\eta-B)\,q_0\|+\|B_\eta^n A_\eta^*(f_\delta-A_\eta u_*)\|.$$

Поэтому в силу леммы 1.1 гл. IV

$$\|r_n{}^0\|\leqslant\varepsilon_{n-1}\eta+n^{-1/2}(\delta+\eta\|u_*\|),$$

где $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$. Пусть $K=\inf(n\geqslant 1:\varepsilon_{n-1}\eta+n^{-1/2}(\delta+\eta\|u_*\|)<$ $<(a_1\delta+a_2\eta)/2,\ \delta>0,\ \eta>0)$. Множество таких n непусто, так что $K<\infty$. Имеем $\|r_K{}^0\|<\mu_0\equiv\mu/2$, поэтому $m^0\leqslant K$. Поскольку $I(\mathscr{D}_\lambda)\,m\leqslant m^0$ при достаточно малых δ, η, то

$$I(\mathscr{D}_\lambda;\ m>K)\to 0, \qquad \delta,\ \eta\to 0.$$

Аналогично рассматриваются случаи (Π_0'), (Π_1), (Π_1').

Случай (Π_2) следует из (Π_1) в силу неравенства (2.33). Точно так же случай (Π_2') следует из (Π_1'). Лемма доказана.

2.7. Доказательство теоремы 2.3. Случай (Π_0'). Пусть $\mu_0\equiv\mu/2$, и пусть выполнено соотношение (2.30). Тогда $I(\mathscr{D}_\lambda)\leqslant m^0$ (δ, $\eta\to 0$). Поэтому для доказательства формулы (2.10) достаточно установить соотношение

$$m^0\leqslant C'_{p,r}(\delta+\eta)^{-2/(p+2)} \qquad (\delta,\ \eta\to 0). \tag{2.34}$$

При $n=m^0-1$ в силу леммы 2.3 имеем

$$\mu_0<(n-[n/2])^{-1}(\|B_\eta^{n+1}-B_\eta^{[n/2]+1}) \quad +$$
$$+(\delta+\eta\|u_*\|)\sum_{k=[n/2]+1}^{n}\|B_\eta^k A_\eta^*\|.$$

Имеем

$$\|B_\eta^k A_\eta^*\|\leqslant k^{-1/2},$$
$$\|(B_\eta^{n+1}-B_\eta^{[n/2]+1})\,q_0\|=\|(B_\eta^{n+1}-B_\eta^{[n/2]+1})\,q_0\|=$$
$$=\|(B_\eta^{n+1}-B_\eta^{[n/2]+1})(A^*A)^{p/2}v\|=\left\|(I-B_\eta)\,B_\eta^{[n/2]+1}\sum_{k=0}^{[n/2]}\times\right.$$
$$\left.\times B_\eta^k(A^*A)^{p/2}\,v\right\|\leqslant 2n\|A_\eta^* A_\eta B_\eta^{[n/2]+1}(A^*A)^{p/2}\,v\|.$$

Если n достаточно велико, то получаем

$$\mu_0<4\|A_\eta^* A_\eta B_\eta^{[n/2]+1}(A^*A)^{p/2}\,v\|.$$

Далее, в силу леммы 1.1 гл. IV

$$\|A_\eta^* A_\eta B_\eta^{[n/2]+1} (A^*A)^{p/2} v\| \leqslant \|A_\eta^* A_\eta B_\eta^{[n/2]+1} (A_\eta^* A_\eta)^{p/2} v\| + \\ + \|A_\eta^* A_\eta B_\eta^{[n/2]+1} ((A_\eta^* A_\eta)^{p/2} - (A^*A)^{p/2}) v\| \leqslant \\ \leqslant C n^{-(1+p/2)} \|B_\eta^{[n/4]} v\| + \varepsilon_{n,p/2} v,$$

где $\varepsilon_{n,p/2} \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда получаем $\mu_0 \leqslant C n^{-(1+p/2)}$, если $n = m^0 - 1$ достаточно велико. Стало быть, действительно имеет место оценка (2.34), а с ней и (2.10). Отсюда же получаем (2.14), если учесть, что $\|B_\eta{}^{[n/4]} v\| \to 0$ при $n \to \infty$, $\eta \to 0$: поскольку $q_0 \in N(A^*A)^\perp$, то можно, не умаляя общности, считать, что и $v \in N(A^*A)^\perp$; это соображение в дальнейшем уже не оговаривается.

Соотношение (2.9) следует из (2.10). В самом деле, в силу леммы 2.2, условия из табл. 2 и (2.10) имеем

$$I(\mathscr{D}_\lambda) \|q_m\| \leqslant I(\mathscr{D}_\lambda) \|B_\lambda^m q_0\| + C(\delta + \eta)^{1-1/(p+2)} + C\varepsilon(\delta + \eta)^{-2/(p+2)} \leqslant \\ \leqslant I(\mathscr{D}_\lambda) \|B_\eta^m q_0\| + C(\delta + \eta)^{(p+1)/(p+2)} + C(\delta + \eta)^{p/(p+2)} \alpha(\delta, \eta), \tag{2.35}$$

где $\alpha(\delta, \eta) \to 0$ при δ, $\eta \to 0$. Поэтому для доказательства неравенства (2.9) достаточно установить оценку

$$I(\mathscr{D}_\lambda) \|B_\eta^m q_0\| \leqslant C(\delta + \eta)^{p/(p+2)} \quad (\delta, \eta \to 0). \tag{2.36}$$

В силу условия теоремы, леммы 1.2 гл. IV и неравенства моментов (см. выше) имеем

$$\|B_\eta q_0\| = \|B_\eta^n (A^*A)^{p/2} v\| \leqslant \|B_\eta^n (A_\eta^* A_\eta)^{p/2} v\| + \|B_\eta^n ((A_\eta^* A_\eta)^{p/2} - \\ - (A^*A)^{p/2}) v\| \leqslant \|B_\eta^n (A_\eta^* A_\eta)^{1+p/2} v\|^{p/(p+2)} \|B_\eta^n v\|^{2/(p+2)} + \\ + C(1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1,p)} \|v\|. \tag{2.37}$$

При $n = m$ имеем $\rho_n \leqslant \mu$, поэтому в силу леммы 2.3

$$\mu \geqslant I(\mathscr{D}_\lambda)(m - [m/2])^{-1} (\|(B_\eta^{m+1} - B_\eta^{[m/2]+1}) q_0\| - \\ - m^{1/2} (\delta + \eta \|u_*\|) - C\varepsilon m \ln m) \geqslant I(\mathscr{D}_\lambda)(\|B_\eta^m (I - B_\eta) q_0\| - \\ - (m/2)^{-1/2} (\delta + \eta \|u_*\|) - C\varepsilon \ln m).$$

Далее, при малых δ, η в силу теоремы 2.1 и условия из табл. 2 имеем

$$I(\mathscr{D}_\lambda) \varepsilon \ln m \leqslant C(\delta + \eta),$$

поэтому, если m достаточно велико, то

$$C\mu \geqslant I(\mathscr{D}_\lambda) \|B_\eta{}^m (I - B_\eta) q_0\|,$$

или

$$I(\mathscr{D}_\lambda) \|B_\eta^m (A_\eta^* A_\eta)^{1+p/2} v\| \leqslant C(\delta + \eta). \tag{2.38}$$

Отсюда и из (2.37) следует соотношение (2.36), а с ним и искомое неравенство (2.9).

Для доказательства (2.13) в силу (2.35) достаточно проверить равенство

$$\lim_{\delta,\eta\to 0} I(\mathscr{D}_\lambda)\|B_\eta^m q_0\|(\delta+\eta)^{-p/(p+2)}=0,$$

которое следует из (2.38), (2.37) и того факта, что

$$\lim_{\delta,\eta\to 0} I(\mathscr{D}'_\lambda)\|B_\eta^m q_0\|=0.$$

Пусть теперь $Bq_0=0$. Тогда соотношения (2.10) и (2.14) следуют из леммы 2.6. Далее, в силу лемм 2.3 и 2.6 и условия из табл. 2 имеем

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\|q_m\|\leqslant\|B_\eta q_0\|+K^{1/4}(\delta+\eta\|u_*\|)+CK(\delta+\eta)\leqslant$$
$$\leqslant 2\eta\|q_0\|+K^{1/4}(\delta+\eta\|u_*\|)+CK(\delta+\eta)$$
$$(\delta,\ \eta\to 0),$$

что влечет за собой (2.9) и (2.13).

Случай (Π_1'). Пусть $Bq_0\neq 0$. Тогда справедливо соотношение (2.30). Пусть $\mu_0=\varkappa\mu$, $0<\varkappa<1$, $\varkappa b_1>1$, $\varkappa b_*>\|u_*\|$. При малых δ, η имеем $I(\mathscr{D}_\lambda)m\leqslant m^0$. Поэтому для доказательства (2.12) достаточно установить оценку

$$m^0\leqslant C(\delta+\eta)^{-2/(2p+1)}\ (\delta,\ \eta\to 0). \tag{2.39}$$

При $n=m^0-1$ в силу леммы 2.3 имеем

$$\mu_0<(n-[n/2])^{-1}\sum_{k=[n/2]+1}^{n}\|s_k^0\|\leqslant$$
$$\leqslant(n-[n/2])^{-1}\sum_{k=[n/2]+1}^{n}(\|A_\eta B_\eta^k q_0\|+\delta+\eta\|u_*\|)\leqslant$$
$$\leqslant\|A_\eta B_\eta^{[n/2]+1}q_0\|+\delta+\eta\|u_*\|.$$

В силу выбора μ_0 получаем

$$\mu_0\leqslant C\|A_\eta B_\eta^{[(m^0-1)/2]+1}q_0\|.$$

Далее, в силу леммы 1.2 гл. IV

$$\|A_\eta B_\eta^{[n/2]+1}q_0\|=\|A_\eta B_\eta^{[n/2]+1}(A^*A)^{p/2}v\|\leqslant$$
$$\leqslant\|A_\eta B_\eta^{[n/2]+1}(A_\eta^*A_\eta)^{p/2}v\|+\|A_\eta B_\eta^{[n/2]+1}((A_\eta^*A_\eta)^{p/2}-$$
$$-(A^*A)^{p/2})v\|\leqslant Cn^{-(p+1)/2}\|B_\eta^{[n/4]}v\|+\varepsilon'_{n,p/2}\eta,$$

где $\varepsilon'_{n,p/2}\to 0$ при $n\to\infty$. Стало быть,

$$\mu_0\leqslant Cn^{-(p+1)/2},$$

если $n=m^0-1$ достаточно велико. Отсюда получаем (2.41) и (2.12). Отсюда же вытекает соотношение (2.16), если учесть, что $\|B_\eta{}^{[n/4]}v\|\to 0$ при $n\to\infty$, $\eta\to 0$.

Соотношение (2.11) следует из (2.12). В самом деле, в силу леммы 2.3, условия из табл. 2 и (2.11) имеем

$$I(\mathcal{D}_\lambda)\|q_m\| \leqslant I(\mathcal{D}_\lambda)\|B_\eta^m q_0\| + C(\delta+\eta)^{1-1/(p+1)} + C\varepsilon(\delta+\eta)^{-2/(p+1)} \leqslant$$
$$\leqslant I(\mathcal{D}_\lambda)\|B_\eta^m q_0\| + C(\delta+\eta)^{p/(p+1)} + C(\delta+\eta)^{2-2/(p+1)} =$$
$$= I(\mathcal{D}_\lambda)\|B_\eta^m q_0\| + C(\delta+\eta)^{p/(p+1)} + C(\delta+\eta)^{2p/(p+1)}. \tag{2.40}$$

Поэтому для доказательства неравенства (2.11) достаточно установить оценку

$$I(\mathcal{D}_\lambda)\|B_\eta^m q_0\| \leqslant C(\delta+\eta)^{p/(p+1)} \quad (\delta,\ \eta\to 0). \tag{2.41}$$

В силу условия теоремы, леммы 1.2 гл. IV и неравенства моментов имеем

$$\|B_\eta^n v_0\| = \|B_\eta^n (A^*A)^{p/2} v\| \leqslant \|B_\eta^n (A_\eta^* A_\eta)^{p/2} v\| +$$
$$+ \|B_\eta^n ((A_\eta^* A_\eta)^{p/2} - (A^*A)^{p/2}) v\| \leqslant$$
$$\leqslant \|B_\eta^n (A_\eta^* A_\eta)^{p+1)/2} v\|^{p/(p+1)} \|B_\eta^n v\|^{1/(p+1)} +$$
$$+ C(1+|\ln\eta|)\,\eta^{\min(1,p)}\|v\|. \tag{2.42}$$

Далее, при $n=m$ имеем $\zeta_n \leqslant \mu$, поэтому в силу леммы 2.3

$$\mu \geqslant I(\mathcal{D}_\lambda)\Big((n-[n/2])^{-1} \sum_{k=[n/2]+1}^{n} \|A_\eta B_\eta^k q_0\| - (\delta + \eta\|u_*\|) - C\varepsilon n^{1/2}\Big) \geqslant$$
$$\geqslant I(\mathcal{D}_\lambda)(\|A_\eta B_\eta^n q_0\| - (\delta+\eta\|u_*\|) - C\varepsilon n^{1/2}).$$

При малых δ, η в силу теоремы 2.1 и условия из табл. 2 имеем

$$\varepsilon m^{1/2} \leqslant c(\delta+\eta)(m^{1/2}(\delta+\eta)) = o(\delta+\eta)$$

при δ, $\eta\to 0$. Стало быть, при малых δ, η получаем

$$C\mu \geqslant I(\mathcal{D}_\lambda)\|A_\eta B_\eta^n q_0\|,$$

откуда

$$I(\mathcal{D}_\lambda)\|B_\eta^n (A_\eta^* A_\eta)^{(p+1)/2} v\| \leqslant C(\delta+\eta). \tag{2.43}$$

Отсюда и из (2.42) следует (2.41), а с ним и искомое неравенство (2.11).

Для доказательства (2.15) заметим, что в силу (2.7) слагаемое $C(\delta+\eta)^{p/(p+1)}$ в (2.40) можно при данном q_0 заменить на $o((\delta+\eta)^{p/(p+1)})$. Поэтому (2.15) будет установлено, если проверить равенство

$$\lim_{\delta,\eta\to 0} I(\mathcal{D}_\lambda)\|B_\eta^m q_0\|(\delta+\eta)^{-p/(p+1)} = 0,$$

которое является следствием (2.42), (2.43) и того факта, что

$$\lim_{\delta,\eta\to 0} I(\mathcal{D}_\lambda)\|B_\eta^m q_0\| = 0.$$

Пусть теперь $Bq_0=0$. Тогда соотношения (2.12) и (2.16) следуют из леммы 2.6. Далее, в силу лемм 2.3 и 2.6 и условия из табл. 2 имеем

$$I(\mathscr{D}_\lambda)\|q_m\|\leqslant\|B_\eta q_0\|+K^{1/2}(\delta+\eta\|u_*\|)+CK(\delta+\eta)^2\leqslant$$
$$\leqslant2\eta\|q_0\|+K^{1/2}(\delta+\eta\|u_*\|)+CK(\delta+\eta)^2,$$

что влечет (2.11) и (2.15).

Случаи (Π_0) и (Π_1) рассматриваются аналогично (Π_0') и (Π_2'). Таким же образом с помощью соотношения (2.35) и уже доказанного для (Π_1, Π_1') рассматриваются и случаи (Π_2, Π_2').

Теорема 2.3 доказана.

На распределения ошибок w_n можно налагать и другие ограничения, лишь бы они позволяли воспользоваться теоремами типа закона больших чисел или повторного логарифма. Иногда достаточно требование попарной независимости (см. [88]), более того, ошибки w_n при разных n могут быть и слабо зависимыми. Можно интересоваться близостью величины $\mathbf{P}(\mathscr{D}_\lambda)$ к единице при $\lambda\to\infty$, это вероятностная задача об уклонениях. Результаты, аналогичные теоремам 2.1—2.3, справедливы и для непрерывного аналога дискретной схемы (2.1). Некоторые из них содержатся в [28]. Отметим, что в силу (2.6), (2.7) и рассуждений настоящего параграфа правила (Π_0, Π_1, Π_0', Π_1') можно несколько видоизменить аналогично (Π_2) и (Π_2'). Например, для (Π_1) можно определить момент останова следующим образом: $m=\inf\,(n\geqslant0\colon\ \|A_\eta\tilde{u}_n-f_\delta\|\leqslant\mu$ либо $n\geqslant a\mu^{-2})$, $a>0$. Все утверждения тогда останутся в силе, а правило останова в таком виде несколько удобнее для практического использования.

3. Сходимость в среднем квадратичном

3.1. Основные предположения и результаты. Пусть для решения задачи (1.1) применяется схема

$$\tilde{u}_n=\tilde{u}_{n-1}-A^*A\tilde{u}_{n-1}+A^*f+w_n,\quad n\geqslant1. \tag{3.1}$$

Предполагается $f\in\mathscr{R}(A)$, гильбертово пространство H сепарабельно, w_n ($n\geqslant1$) — независимые в совокупности случайные величины на вероятностном пространстве (Ω, $\mathscr{F}$, $\mathbf{P}$) со значениями в H,

$$\mathbf{E}w_n=0,\ \mathbf{E}\|w_n\|^2\leqslant\varepsilon^2,\quad n\geqslant1. \tag{3.2}$$

Здесь изучается лишь одно правило останова по невязке $m=\inf\,(n\geqslant0\colon\ \|Au_n-f\|\leqslant\mu$ либо $n\geqslant a\mu^{-2})$, $a>0$ (m — момент останова). Пусть вновь u_* — нормальное относительно u_0 решение задачи (1.1), $\mu=\mu(\varepsilon)\to0$, $\varepsilon\to0$.

Теорема 3.1. Пусть выполнено неравенство

$$\mu\geqslant b\varepsilon\quad(b>1). \tag{3.3}$$

Тогда справедливы соотношения

$$\mathrm{E}m \leqslant \|q_0\|^2/(\mu^2-\varepsilon^2), \tag{3.4}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mu^2 \mathrm{E}m = 0. \tag{3.5}$$

Теорема 3.2. Пусть выполнено неравенство

$$\varepsilon \leqslant K\mu^2 \quad (K>0). \tag{3.6}$$

Тогда имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{E}\|u_m - u_*\|^2 = 0. \tag{3.7}$$

Равенство (3.7) означает регуляризацию в среднем квадратичном.

3.2. Доказательство теоремы 3.1. Пусть $\mathcal{F}_k = \sigma(w_1, \ldots, w_k)$ — σ-алгебра, порожденная случайными величинами $w_1, \ldots, w_k$. На множестве $(k<m)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\|q_{k+1}\|^2 \mid \mathcal{F}_k) &= \mathrm{E}(\|q_k - A^*Aq_k + w_k\|^2 \mid \mathcal{F}_k) \leqslant \\ &\leqslant \|q_k\|^2 - 2\langle q_k, A^*Aq_k\rangle + \|A^*Aq_k\|^2 + \varepsilon^2 \leqslant \\ &< \|q_k\|^2 - \|(A^*A)^{1/2}q_k\|^2 + \varepsilon^2 = \|q_k\|^2 - \|Aq_k\|^2 + \varepsilon^2 \leqslant \\ &\leqslant \|q_k\|^2 - (\mu^2 - \varepsilon^2). \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}I(k+1<m)\|q_{k+1}\|^2 &\leqslant \mathrm{E}I(k<m)\|q_{k+1}\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \mathrm{E}I(k<m)\|q_k\|^2 - (\mu^2-\varepsilon^2)\, I(k<m). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Складывая все такие неравенства от 0 до n, получаем

$$\mathrm{E}I(n+1<m)\|q_{n+1}\|^2 \leqslant \|q_0\|^2 - (\mu^2-\varepsilon^2)\sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}I(i<m),$$

откуда следует

$$(\mu^2-\varepsilon^2)\sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}I(i<m) \leqslant \|q_0\|^2$$

при всех $n \geqslant 1$. Устремляя здесь n к бесконечности и пользуясь равенством

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{E}I(i<m) = \mathrm{E}m$$

для случайных величин с целыми неотрицательными значениями, в силу теоремы о предельном переходе получаем оценку (3.4).

Отметим, что правая часть (3.4) не зависит от a.

Сложим неравенства (3.8) не от нуля, а от r до n $(0<r<n)$.

Получаем

$$\mathrm{E}I(n+1<m)\|q_{n+1}\|^2 \leqslant \mathrm{E}I(r<m)\|q_r\|^2 - (\mu^2-\varepsilon^2)\sum_{i=r}^{n}\mathrm{E}I(i<m).$$

Отсюда

$$(\mu^2-\varepsilon^2)\,\mathrm{E}m \leqslant r(\mu^2-\varepsilon^2) + \mathrm{E}\|q_r\|^2.$$

Поэтому для того, чтобы доказать (3.5), достаточно установить соотношение

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\mathrm{E}\|q_r\|^2 = 0. \tag{3.9}$$

Поскольку

$$q_r = B^r q_0 + B^{r-1} w_1 + B^{r-2} w_2 + \ldots + B w_{r-1} + w_r,$$

то имеет место неравенство

$$\mathrm{E}\|q_r\|^2 \leqslant \|B^r q_0\|^2 + r\varepsilon^2.$$

Значит, для доказательства (3.9) достаточно проверить равенство

$$\lim_{r\to\infty}\|B^r q_0\| = 0,$$

которое следует из леммы 2.4 и определения нормального решения. Теорема 3.1 доказана.

3.3. Доказательства теоремы 3.2. Пусть $Bq_0 \neq 0$. Тогда $B^r q_0 \neq 0$ и $AB^r q_0 \neq 0$ при всех $r=1, 2, \ldots$. Значит, из равенства

$$Aq_n = AB^n q_0 + \sum_{i=1}^{n} AB^{n-i} w_i$$

следует справедливость соотношения

$$(\mathrm{P})\lim_{\varepsilon\to 0} m = \infty$$

($(\mathrm{P})\lim$ означает предел по вероятности). В силу ограниченности $\|B^n q_0\|$ при $n \geqslant 1$ имеем

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\mathrm{E}\|B^m q_0\|^2 = 0.$$

Поэтому получаем

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\mathrm{E}\|q_m\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\,\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\mathrm{E}\|B^m q_0\|^2 + 2\,\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\mathrm{E}\left\|\sum_{k=1}^{m} B^{m-k} w_k\right\|^2 =$$

$$= 2\,\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\mathrm{E}\left\|\sum_{k=1}^{m} B^{m-k} w_k\right\|^2.$$

Далее,

$$\mathrm{E}\left\|\sum_{k=1}^{m} B^{m-k} w_k\right\|^2 \leqslant \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{m} \|w_k\|\right)^2 .$$

Пусть

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \|w_k\|, \qquad M_n = S_n - \sum_{k=1}^{n} E\,\|w_k\|, \qquad R_n = S_n - M_n.$$

Тогда

$$\mathrm{E}S_m^2 = \mathrm{E}\,(M_m + R_m)^2 \leqslant 2\mathrm{E}M_m^2 + 2\mathrm{E}R_m^2.$$

Поскольку M_n — мартингал, то в силу предложения 1.5 имеем $\mathrm{E}M_m^2 \leqslant \varepsilon^2 \mathrm{E}m$. Далее, $R_n \leqslant \varepsilon n$, поэтому $\mathrm{E}R_m^2 \leqslant \varepsilon^2 \mathrm{E}m^2$. Итак, $\mathrm{E}S_m^2 \leqslant 2\varepsilon^2 \mathrm{E}m + 2\varepsilon^2 a\mu^{-2}\mathrm{E}m \to 0$, $\varepsilon \to 0$, что и доказывает искомое соотношение.

Пусть $Bq_0 = 0$. Тогда $q_m = \sum_{i=1}^{m} B^{m-i} w_i$, поэтому

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, E\,\|q_m\|^2 = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \mathrm{E}\left\|\sum_{i=1}^{m} B^{m-i} w_i\right\|^2 ,$$

и далее доказательство повторяет рассуждения для случая $Bq_0 \neq 0$. Теорема 3.2 доказана.

4. Статистический подход к выбору параметра регуляризации

4. 1. **Метод М. М. Лаврентьева.** Отступим на время от итерационной схемы и рассмотрим метод Лаврентьева для самосопряженного случая $A = A^* \geqslant 0$. Пусть $u_\alpha = (\alpha I + A)^{-1} f_\delta$, для простоты считаем, что оператор A известен точно и $\|A\| \leqslant 1$. Ниже излагается модель одного эвристического подхода к выбору параметра α.

Будем считать, что экспериментатор имеет дело не с одной некорректной задачей, а с последовательностью таких задач $(A(n), f(n), n = 1, 2, \ldots)$, где операторы $A(n)$ и правые части $f(n)$ выбираются из некоторых классов соответственно операторов и элементов пространства H с некоторыми частотами. Более строго это означает, что на классе $\mathfrak{M}$ пар (A, f) с естественной σ-алгеброй задано некоторое вероятностное распределение $\mathcal{P}$, неизвестное наблюдателю, и $(A(n), f(n))$ являются реализацией последовательности независимых статистических экспериментов на этом классе. Ставится задача: по результатам наблюдений так выбрать параметр α, чтобы минимизировать максимум ошибки $\|u_\alpha - u_*\|$ на подмножестве $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ достаточно большой вероятности $\mathcal{P}(\mathfrak{N}) \geqslant 1 - \delta$ или хотя бы максимум не самой ошибки, а какой-то ее оценки сверху. Можно предположить например, оценку, описываемую ниже. Имеем

$$\|u_\alpha - u_*\| = \|(\alpha I + A)^{-1} f_\delta - A^{-1} f\| \leqslant$$
$$\leqslant \|(\alpha + A)^{-1} f_\delta - (\alpha + A)^{-1} f\| + \|((\alpha + A)^{-1} - A^{-1}) A u_*\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\delta}{\alpha} + \left\| \int_0^1 ((\alpha + \lambda)^{-1} - \lambda^{-1})\, dE_\lambda u_* \right\| =$$
$$= \frac{\delta}{\alpha} + \left\| \int_0^1 \frac{\alpha}{\alpha + \lambda} dE_\lambda u_* \right\|,$$

где E_λ — спектральное разложение для оператора A. Далее,

$$\left\| \int_0^1 \frac{\alpha}{\alpha + \lambda}\, dE_\lambda u_* \right\| = \left(\int_0^1 \frac{\alpha^2}{(\alpha + \lambda)^2} d\,(E_\lambda u_*, u_*) \right)^{1/2}.$$

Пусть $e(\lambda) = (E_\lambda u_*, u_*)$. Тогда

$$\|u_\alpha - u_*\| \leqslant \frac{\delta}{\alpha} + \left(\int_0^1 \frac{\alpha^2}{(\alpha + \lambda)^2} de(\lambda) \right)^{1/2}.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^1 \frac{\alpha^2}{(\alpha + \lambda)^2} de(\lambda) = \frac{\alpha^2}{(\alpha + 1)^2} e(1) + \int_0^1 e(\lambda) \frac{3\alpha^2}{(\alpha + \lambda)^3} d\lambda.$$

Допустим, что мы на основании некоторых наблюдений подозреваем, что детерминированная функция $\bar{e}(\lambda)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, часто является мажорантой для функции $e(\lambda)$. Тогда можно поставить эксперимент для статистической проверки гипотезы $(\bar{e}(\lambda) \geqslant e(\lambda),\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ против альтернативы $(\exists \lambda_0\colon \bar{e}(\lambda_0) < e(\lambda))$. Считается, что некоторое число случайно выбранных задач (A, f) мы можем решить с повышенной точностью, а в модели — просто точно. Если проверка с заданным уровнем надежности показала, что гипотеза верна, то с этим уровнем надежности мы имеем оценку

$$\|u_\alpha - u_*\| \leqslant \frac{\delta}{\alpha} + \left(\frac{\alpha^2}{(\alpha + 1)^2} \bar{e}(1) + \int_0^1 \bar{e}(\lambda) \frac{3\alpha^2}{(\alpha + \lambda)^3} d\lambda \right)^{1/2}, \qquad (4.1)$$

и теперь в соответствии с нашей программой задача свелась к минимизации правой части неравенства (4.1) по α. Задавая конкретный вид функции $\bar{e}(\lambda)$, можно находить минимум правой части (4.1) с помощью известных методов анализа.

4.2. **Итерационная схема.** Рассмотрим итерационную процедуру (2.1). Для нее также можно поставить вопрос о статистическом обосновании выбора момента останова m. Как и в разд. 3, будем считать, что пара (A, f) распределена на пространстве ($\mathscr{L}(H, F)$, F) в соответствии с некоторым распределением $\mathscr{P}$, $\|A\|\leqslant 1$. Требуется по реализации последовательности независимых статистических испытаний так выбрать момент останова, чтобы минимизировать, например, среднеквадратичную ошибку $\mathbf{E}\|q_m\|^2$ или хотя бы ее оценку сверху с достаточной степенью надежности. Мы считаем при этом, что величины $(A_\eta, f_\delta, w_1, \ldots, w_n, \ldots)$ независимы в совокупности. При этом удобно считать, что ошибки $w_1, \ldots, w_n, \ldots$ заданы на своем вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ и символ математического ожидания $\mathbf{E}$ относится именно к мере $\mathbf{P}$. Уровень же надежности относится к мере $\mathscr{P}$.

В силу независимости ошибок w_n от (A_η, f_δ) имеет место неравенство

$$\mathbf{E}\|q_n\|^2\leqslant 2\|B^nq_0\|^2+2(\delta+\eta\|u_*\|)^2n+\varepsilon^2n.$$

Далее,

$$\|B^nq_0\|^2=\left\|\int_0^1(1-\lambda)^n dE_\lambda q_0\right\|^2=\int_0^1(1-\lambda)^{2n}\,d(E_\lambda q_0, q_0).$$

Пусть $r(\lambda)=(E_\lambda q_0, q_0)$ и нам удалось проверить гипотезу $(\bar r(\lambda)\geqslant r(\lambda),\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1)$ против альтернативы $(\exists\lambda_0\colon \bar r(\lambda_0)<r(\lambda_0))$ с заданным уровнем надежности $1-\rho/2$. Тогда с этим же уровнем надежности имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\|q_n'\|^2&\leqslant n(\varepsilon^2+2(\delta+\eta\|u_*\|^2)+\int_0^1(1-\lambda)^{2n}dr(\lambda)=\\&=n(\varepsilon^2+2(\delta+\eta\|u_*\|)^2)-\int_0^1 r(\lambda)\,d(1-\lambda)^{2n}=\\&=n\left(\varepsilon^2+2\left((\delta+\eta\|u_*\|)^2+\int_0^1 r(\lambda)(1-\lambda)^{2n-1}\,d\lambda\right)\right)\leqslant\\&\leqslant n\left(\varepsilon^2+2\left((\delta+\eta\|u_*\|)^2+\int_0^1 \bar r(\lambda)(1-\lambda)^{2n-1}d\lambda\right)\right).\end{aligned}$$

Пусть с тем же уровнем надежности проверена гипотеза $\|u_*\|\leqslant C$. Тогда с уровнем надежности $1-\rho$ имеет место оценка

$$\mathbf{E}\|q_n\|^2\leqslant n\left(\varepsilon^2+2\left((\delta+\eta C)^2+\int_0^1 \bar r(\lambda)(1-\lambda)^{2n-1}\,d\lambda\right)\right). \qquad (4.2)$$

Задача свелась к минимизации по n правой части неравенства (4.2).

4.3. Пример. Пусть функция $\bar r(\lambda)$ имеет вид

$$\bar r(\lambda)=aI(0\leqslant\lambda<\lambda_0)+bI(\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant 1),\qquad 0\leqslant a<b.$$

Тогда имеем

$$\int_0^1 \bar{r}(\lambda)(1-\lambda)^{2n-1}\,d\lambda = a\int_0^{\lambda_0}(1-\lambda)^{2n-1}\,d\lambda + b\int_{\lambda_0}^1(1-\lambda)^{2n-1}\,d\lambda =$$

$$= a\int_{1-\lambda_0}^{1}\lambda^{2n-1}d\lambda + b\int_0^{1-\lambda_0}\lambda^{2n-1}d\lambda =$$

$$= \frac{a}{2n}\lambda^{2n}\Big|_{1-\lambda_0}^{1} + \frac{b}{2n}\lambda^{2n}\Big|_0^{1-\lambda_0} = \frac{b-a}{2n}(1-\lambda_0)^{2n} + \frac{a}{2n}\,.$$

Значит, с уровнем надежности 1—ρ

$$\mathrm{E}\|q_n\|^2 \leqslant n\Bigl(\varepsilon^2 + 2\Bigl((\delta+\eta C)^2 + \frac{b-a}{2n}(1-\lambda_0)^{2n} + \frac{a}{2n}\Bigr)\,.$$

Пусть $\gamma=(\varepsilon^2/2)+(\delta+\eta C)^2$. Рассмотрим на $(0, \infty)$ функцию

$$h(x) = \gamma x + \frac{b-a}{2x}(1-\lambda_0)^{2x} + \frac{a}{2x}\,.$$

Ее производная равна

$$h'(x) = \gamma - \frac{b-a}{2x^2}(1-\lambda_0)^{2x} + \frac{b-a}{2x}(1-\lambda_0)^{2x}\ln(1-\lambda_0) - \frac{a}{2x^2}\,. \tag{4.3}$$

Здесь b и a — постоянные, а $\gamma\to 0$ при δ, η, $\varepsilon\to 0$. Стало быть, решение x_0 уравнения $h'(x)=0$ велико, $x_0\to\infty$ при $\gamma\to 0$. В этой ситуации главный член правой части (4.3) равен $\gamma - \frac{a}{2x^2}$, а x_0 приближенно равно $\sqrt{a/2\gamma}$.

Вторая производная имеет вид

$$h''(x) = \frac{b-a}{6x^3}(1-\lambda_0)^{2x} - \frac{b-a}{x^2}(1-\lambda_0)^{2x}\times$$
$$\times\ln(1-\lambda_0) + \ldots > 0,\ x>0.$$

Значит, $\min\limits_{n=1,2,\ldots} h(n)$ достигается на одном из двух целых чисел, ближайших к $x_0\approx\sqrt{a/2\gamma}$ (если само x_0 дробное). В точке x_0 функция h принимает значение

$$h(x_0) \approx \gamma x_0 + \frac{b-a}{2\sqrt{a}}\sqrt{2\gamma}(1-\lambda_0)^{\sqrt{a/\gamma}} + \frac{a\sqrt{\gamma}}{\sqrt{2a}} \approx \sqrt{2a\gamma}\times(\varepsilon+\delta+\eta).$$

Мы получили порядок оценки сверху величины $\mathrm{E}\|q_n\|^2$ с заданным уровнем надежности.

6 глава

НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ ЗАДАЧИ

Задачу $Au=f$ с оператором $A\in\mathscr{L}(H, F)$, имеющим замкнутую область значений $\mathscr{R}(A)\subseteq F$, принято называть нормально разрешимой. По терминологии гл. I нормально разрешимые задачи не являются существенно некорректными, но все же будут некорректными, если $\mathscr{N}(A)\neq 0$ или $\mathscr{R}(A)\neq F$. Именно такие задачи и будут в поле нашего внимания.

В случае приближенно заданного оператора и правой части ($\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$, $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$) некорректно поставленная нормально разрешимая задача требует регуляризации, как и всякая другая некорректная задача. В роли регуляризаторов ниже используются методы, введенные в гл. II. Отличительной чертой нормально разрешимой задачи является то обстоятельство, что при удачном выборе параметра регуляризации r решение или псевдорешение u_* удается восстановить с точностью, сравнимой с точностью исходных данных. А именно, удается установить оценку вида

$$\|u_r-u_*\|\leqslant c\,\frac{\delta+\|u_*\|\eta}{\mu-\eta}+\frac{\|f-Qf\|}{(\mu-\eta)^2}\,\eta,$$

где $\mu=\|A^+\|$ (см. также (1.1)), Q — ортопроектор, проектирующий на $\mathscr{R}(A)$; постоянная c выписывается.

Оказывается, подобные оценки имеют правильный порядок не только по δ и η, но и по μ. Это обстоятельство ставит определенные ограничения на класс тех задач, к которым результаты главы стоит применять,— должно соблюдаться соотношение $\delta+\eta\ll\mu$ (в случае $f\in\mathscr{R}(A)$) или даже соотношение $\eta\ll\mu^2$ (в случае $f\not\in\mathscr{R}(A)$). Результаты применимы, например, к интегральным уравнениям второго рода

$$u(t)-\lambda\int\limits_D \mathscr{K}(t, s)\,u(s)\,ds=f(t),$$

когда λ — характеристическое значение. Формально и каждая система линейных алгебраических уравнений принадлежит классу нормально разрешимых задач, однако не всегда выдерживается указанное соотношение между η и μ.

1. Возмущение операторов, имеющих замкнутую область значений

1.1. **Операторы с замкнутой областью значений.** Пусть, как обычно, H и F — гильбертовы пространства.

Лемма 1.1. Оператор $A\in\mathscr{L}(H, F)$ тогда и только тогда имеет замкнутую область значений $\mathscr{R}(A)\subseteq F$, когда

$$\mu \equiv \inf_{u\in H,\ u\perp\mathscr{N}(A),\|u\|=1} \|Au\| > 0. \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (1.1). Покажем, что $\mathscr{R}(A)\subseteq F$ замкнуто. Пусть $z_n\in\mathscr{R}(A)$, $z_n\to z$ $(n\in N)$. Обозначим через u_n прообраз z_n, ортогональный $\mathscr{N}(A)$. В силу определения μ (см. (1.1)) $\|Au_n\|\geqslant\mu\|u_n\|$, поэтому последовательность u_n ограничена ($\|u_n\|\leqslant\mu^{-1}\|z_n\|$) и из нее можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть $u_n \dashrightarrow u$ $(n\in N'\subseteq N)$. Тогда $Au_n\dashrightarrow Au$ $(n\in N')$, а так как $Au_n=z_n\to z$, то $z=Au$, $z\in\mathscr{R}(A)$. Это доказывает замкнутость $\mathscr{R}(A)$.

Пусть теперь, наоборот, $\mathscr{R}(A)$ замкнуто. Покажем, что выполнено (1.1). Обозначим через B сужение оператора A на $\mathscr{N}(A)^\perp$ (ортогональное дополнение к $\mathscr{N}(A)$). Подпространства $\mathscr{N}(A)^\perp$ и $\mathscr{R}(A)$ как замкнутые подпространства гильбертовых пространств и сами являются гильбертовыми (в частности, полными) пространствами. Это позволяет воспользоваться теоремой Банаха о непрерывности обратного оператора: поскольку B переводит $\mathscr{N}(A)^\perp$ взаимно однозначно на $\mathscr{R}(A)$, то он имеет ограниченный обратный $B^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{R}(A), \mathscr{N}(A)^\perp)$. Условие (1.1) выполняется с $\mu=1/\|B^{-1}\|$. Лемма 1.1 доказана.

Из полярного разложения $A=U(A^*A)^{1/2}$ вытекает, что $\mathscr{R}(A)$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\mathscr{R}((A^*A)^{1/2})$ замкнуто. При этом определенному в (1.1) числу μ можно дать следующее равносильное определение: μ — это наименьшая ненулевая точка спектра неотрицательного самосопряженного оператора $(A^*A)^{1/2}$, или

$$\mu^2 = \min_{\lambda\in\sigma(A^*A),\ \lambda\neq0} \lambda = \min_{\lambda\in\sigma(AA^*),\ \lambda\neq0} \lambda;$$

мы учли, что $\sigma(A^*A)$ и $\sigma(AA^*)$ с точностью до точки 0 совпадают. Отсюда, между прочим, можно сделать вывод, что $\mathscr{R}(A)\subseteq F$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто $\mathscr{R}(A^*)\subseteq H$.

Из замкнутости $\mathscr{R}(A)$ следует ограниченность псевдообратного A^+; при этом $\|A^+\|=\mu^{-1}$.

1.2. **Лемма о локализации спектра.** Сформулируем вспомогательный результат, используемый в следующем пункте.

Лемма 1.2 (см. [38]). Пусть $C\in\mathscr{L}(H, H)$ — самосопряженный оператор, $\Pi\in\mathscr{L}(H, H)$ — некоторый ортопроектор. Если для каждого $u\in H$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &\langle C\Pi u, \Pi u\rangle\leqslant c_1\|\Pi u\|^2,\\ &\langle C(I-\Pi)u, (I-\Pi)u\rangle\geqslant c_2\|(I-\Pi)u\|^2, \end{aligned} \tag{1.2}$$

причем $c_1<c_2$, то интервал (c_1, c_2) состоит из регулярных точек оператора C, т. е. $(c_1, c_2)\cap\sigma(C)=\varnothing$.

Доказательство. Пространство H разлагается в ортогональную сумму $H=H_1\oplus H_2$ подпространств $H_1=\Pi H$ и $H_2=(I-\Pi)H$. Это разложение порождает матричное разложение оператора C:

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Pi C\Pi & \Pi C(I-\Pi) \\ (I-\Pi)C\Pi & (I-\Pi)C(I-\Pi) \end{pmatrix},$$

$$C_{ij}=C_{ji}^*\in\mathscr{L}(H_j, H_i).$$

Пусть $\lambda\in(c_1, c_2)$. Эта точка будет регулярной для оператора C, если для любого $v\in H$ уравнение $(\lambda I-C)u=v$ имеет единственное решение $u\in H$. Это равносильно однозначной разрешимости системы

$$\lambda u_1-C_{11}u_1-C_{12}u_2=v_1, \qquad \lambda u_2-C_{21}u_1-C_{22}u_2=v_2, \tag{1.3}$$

где $v_1\in H_1$ и $v_2\in H_2$ заданы, а $u_1\in H_1$ и $u_2\in H_2$ искомые. Из (1.2) следует, что

$$\sigma(C_{11})\subset(-\infty, c_1], \qquad \sigma(C_{22})\subset[c_2, \infty). \tag{1.4}$$

Значит, λ — регулярная точка операторов C_{11} и C_{22}. Из первого уравнения системы (1.3) выразим

$$u_1=(\lambda I-C_{11})^{-1}C_{12}u_2+(\lambda I-C_{11})^{-1}v_1$$

и подставим во второе уравнение:

$$\lambda u_2-[C_{21}(\lambda I-C_{11})^{-1}C_{12}+C_{22}]u_2=v_2+C_{21}(\lambda I-C_{11})^{-1}v_1. \tag{1.5}$$

Из (1.4) следует, что оператор $(\lambda I-C_{11})^{-1}$ при $\lambda>c_1$ неотрицателен, а вместе с ним неотрицателен и (самосопряженный в силу равенства $C_{21}^*=C_{12}$) оператор $C_{21}(\lambda I-C_{11})^{-1}C_{12}$. Поэтому нижняя грань спектра оператора $C_{21}(\lambda I-C_{11})^{-1}C_{12}+C_{22}$ не меньше c_2 (см. (1.4)). Следовательно, уравнение (1.5) имеет единственное решение и рассматриваемая точка $\lambda\in(c_1, c_2)$ регулярна для C. Лемма 1.2 доказана.

1.3. Локализация спектра при возмущении оператора. Из (1.1) следует, что

$$\sigma(A^*A), \sigma(AA^*)\subseteq\{0\}\cup[\mu^2, \|A\|^2).$$

Поставим вопрос о том, насколько это локализующее множество может «расплыться» при возмущении оператора A.

Лемма 1.3. Пусть A, $A_\eta\in\mathscr{L}(H, F)$, выполнено условие (1.1) и

$$\|A_\eta-A\|\leqslant\eta, \quad 0<\eta<\mu/2. \tag{1.6}$$

Тогда

$$\sigma(A_\eta^*A_\eta), \sigma(A_\eta A_\eta^*)\subseteq[0, \eta^2]\cup[(\mu-\eta)^2, \|A_\eta\|^2]. \tag{1.7}$$

Доказательство. Применим лемму 1.2 с $C=A_\eta^*A_\eta$, взяв в качестве П ортопроектор, проектирующий на $\mathcal{N}(A)$. Тогда $(I-\Pi)u\perp\mathcal{N}(A)$ и

$$\langle C\Pi u,\ \Pi u\rangle=\|A_\eta \Pi u\|^2=\|(A_\eta-A)\Pi u\|^2\leqslant\eta^2\|\Pi u\|^2,$$
$$\langle C(I-\Pi)u,\ (I-\Pi)u\rangle=\|A_\eta(I-\Pi)u\|^2\geqslant[\|A(I-\Pi)u\|-$$
$$-\|(A_\eta-A)(I-\Pi)u\|]^2\geqslant(\mu-\eta)^2\|(I-\Pi)u\|^2.$$

По лемме 1.2 $(\eta^2,\ (\mu-\eta)^2)\cap\sigma(A_\eta{}^*A_\eta)=\varnothing$, т. е. имеет место включение (1.7). Лемма 1.3 доказана.

Нетрудно построить пример такого оператора A_η, $\|A_\eta-A\|\leqslant\leqslant\eta<\mu/2$, что точки η^2 и $(\mu-\eta)^2$ принадлежат $\sigma(A_\eta{}^*A_\eta)$.

Обозначим через $\mu_\eta{}^2$ наименьшую точку спектра $\sigma(A_\eta{}^*A_\eta)$ вне $[0,\ \eta^2]$. Таким образом,

$$\sigma(A_\eta^*A_\eta),\ \sigma(A_\eta A_\eta^*)\subseteq[0,\ \eta^2]\cup[\mu_\eta^2,\ \|A_\eta\|^2]. \tag{1.8}$$

Число μ_η в дальнейшем будет играть важную роль. Его можно рассматривать как аппроксимацию числа μ (см. (1.1)), доступную в ситуации, когда оператор A неизвестен.

Лемма 1.4. Пусть выполнены условия (1.1) и (1.6). Тогда

$$|\mu_\eta-\mu|\leqslant\eta. \tag{1.9}$$

Доказательство. По лемме 1.3 интервал $(\eta^2,\ (\mu-\eta)^2)$ свободен от точек $\sigma(A_\eta{}^*A_\eta)$. Поэтому (1.9) будет доказано, если установить непустоту множества $\sigma(A_\eta{}^*A_\eta)\cap[(\mu-\eta)^2,\ (\mu+\eta)^2]$. Рассуждая от противного, допустим, что указанное множество пусто. Ввиду замкнутости $\sigma(A_\eta{}^*A_\eta)$ тогда имеем

$$\sigma(A_\eta A_\eta)\cap(\eta^2,\ c_\eta^2)=\varnothing$$

с некоторым $c_\eta>\mu+\eta$. (в действительности можно было бы положить $c_\eta=\mu_\eta$, но мы пока не знаем, что $\sigma(A_\eta{}^*A_\eta)\cap(\eta^2,\ \infty)$ непусто). Применим лемму 1.2 с $C=A^*A$, взяв за $\Pi=\Pi_\eta$ спектральный проектор оператора $A_\eta{}^*A_\eta$, проектирующий на инвариантное подпространство этого оператора, соответствующее части его спектра в $[0,\ \eta^2]$. Тогда $I-\Pi_\eta$ проектирует на инвариантное подпространство оператора $A_\eta{}^*A_\eta$, соответствующее части спектра в $[c_\eta{}^2,\ \|A_\eta\|^2]$. Имеем

$$\langle C\Pi_\eta u,\ \Pi_\eta u\rangle=\|A\Pi_\eta u\|^2\leqslant[\|(A-A_\eta)\Pi_\eta u\|+\|A_\eta\Pi_\eta u\|]^2\leqslant(2\eta)^2\|\Pi_\eta u\|^2,$$
$$\langle C(I-\Pi_\eta)u,\ (I-\Pi_\eta)u\rangle=\|A(I-\Pi_\eta)u\|^2\geqslant$$
$$\geqslant[\|A_\eta(I-\Pi_\eta)u\|-\|(A_\eta-A)(I-\Pi_\eta)u\|]^2\geqslant(c_\eta-\eta)^2\|(I-\Pi_\eta)u\|^2$$

По лемме 1.2 интервал $((2\eta)^2,\ (c_\eta-\eta)^2)$ состоит из регулярных точек оператора A^*A. Но $\mu^2\in\sigma(A^*A)$ принадлежит этому интервалу. Полученное противоречие доказывает непустоту $\sigma(A_\eta{}^*A_\eta)\cap\cap[(\mu-\eta)^2,\ (\mu+\eta)^2]$ и вместе с ней (1.9). Лемма 1.4 доказана.

1.4. **Оценки спектральных проекторов.** Как обычно, через $P\in\mathcal{L}(H,\ H)$ и $Q\in\mathcal{L}(F,\ F)$ обозначаем ортопроекторы, проектирующие соответственно на $\mathcal{R}(A^*)\subseteq H$ и $\mathcal{R}(A)\subseteq F$ (в данном случае $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{R}(A^*)$ замкнуты). Введем также ортопроекторы

$P_\eta = \mathscr{L}(H, H)$ и $Q_\eta \in \mathscr{L}(F, F)$, проектирующие на инвариантные подпространства операторов $A_\eta^* A_\eta$ и $A_\eta A_\eta^*$ соответствующие части $\sigma(A_\eta^* A_\eta)$ и $\sigma(A_\eta A_\eta^*)$ в $[\mu_\eta^2, \|A_\eta\|^2]$ (см. (1.8)).

Лемма 1.5. Пусть выполнены условия (1.1) и (1.6). Тогда

$$\|P_\eta - P\| \leqslant \eta/(\mu - \eta), \qquad \|Q_\eta - Q\| \leqslant \eta/(\mu - \eta), \tag{1.10}$$

$$\|(I - P_\eta) P\| \leqslant \eta/(\mu - \eta), \qquad \|(I - Q_\eta) Q\| \leqslant \eta/(\mu - \eta), \tag{1.11}$$

$$\|P_\eta (I - P)\| \leqslant \eta/(\mu - \eta), \qquad \|Q_\eta (I - Q)\| \leqslant \eta/(\mu - \eta). \tag{1.12}$$

Доказательство. Сперва докажем (1.12). Оператор $(A_\eta^* A_\eta)^{1/2}$ на подпространстве $P_\eta H$ обратим,

$$\|(A_\eta^* A_\eta)^{1/2} u\| \geqslant (\mu - \eta) \|u\|^2, \qquad u \in P_\eta H.$$

Учитывая также, что $A(I - P) = 0$, имеем

$$\begin{aligned}\|P_\eta (I - P)\| &\leqslant (\mu - \eta)^{-1} \|(A_\eta^* A_\eta)^{1/2} P_\eta (I - P)\| = (\mu - \eta)^{-1} \|P_\eta \times \\ &\times (A_\eta^* A_\eta)^{1/2} (I - P)\| \leqslant (\mu - \eta)^{-1} \|(A_\eta^* A_\eta)^{1/2} (I - P)\| = \\ &= (\mu - \eta)^{-1} \|A_\eta (I - P)\| = (\mu - \eta)^{-1} \|(A_\eta - A)(I - P)\| \leqslant (\mu - \eta)^{-1} \eta.\end{aligned}$$

Аналогично доказывается второе из неравенств (1.12).

Докажем (1.11). Ортопроектор $I - P_\eta$ проектирует на инвариантное подпространство оператора $A_\eta^* A_\eta$, соответствующее части $\sigma(A_\eta^* A_\eta)$ в $[0, \eta^2]$ (см. (1.8)). Поэтому

$$\|A_\eta (I - P_\eta)\| = \|(A_\eta^* A_\eta)^{1/2} (I - P_\eta)\| \leqslant \eta.$$

Кроме того, $A_\eta (I - P_\eta) H \subseteq (I - Q_\eta) F$. Учитывая также, что $P = A^+ A$, $A^+ = A^+ Q$, $\|A^+\| = \mu^{-1}$, оценим

$$\begin{aligned}\|(I - P_\eta) P\| &= \|P (I - P_\eta)\| = \|A^+ A (I - P_\eta)\| \leqslant \\ &\leqslant \|A^+ (A - A_\eta)(I - P_\eta)\| + \|A^+ A_\eta (I - P_\eta)\| \leqslant \\ &\leqslant \mu^{-1} \eta + \sup_{z \in (I - Q_\eta) F, \|z\| \leqslant \eta} \|A^+ Q z\| \leqslant \mu^{-1} \eta (1 + \|Q (I - Q_\eta)\|).\end{aligned}$$

Из соображений симметрии получаем аналогичное неравенство

$$\|(I - Q_\eta) Q\| \leqslant \mu^{-1} \eta (1 + \|P (I - P_\eta)\|).$$

Обозначая $\varepsilon_\eta = \max\{\|(I - P_\eta) P\|, \|(I - Q_\eta) Q\|\}$, из последних двух неравенств получаем $\varepsilon_\eta \leqslant \mu^{-1} \eta (1 + \varepsilon_\eta)$, откуда $\varepsilon_\eta \leqslant (\mu - \eta)^{-1} \eta$. Этим (1.11) доказано.

Неравенства (1.10) являются прямым следствием (1.11) и (1.12). Действительно,

$$\begin{aligned}\|(P_\eta - P) u\|^2 &= \|P_\eta (P_\eta - P) u\|^2 + \|(I - P_\eta)(P_\eta - P) u\|^2 = \\ &= \|P_\eta (I - P) u\|^2 + \|(I - P_\eta) P u\|^2 \leqslant \\ &\leqslant (\mu - \eta)^{-2} \eta^2 (\|I - P) u\|^2 + \|P u\|^2) = (\mu - \eta)^{-2} \eta^2 \|u\|^2.\end{aligned}$$

Лемма 1.5 доказана.

Оценки (1.10)—(1.12) асимптотически точны. Покажем, иапример, что в случае нетривиального $\mathscr{N}(A)$ найдутся такие $A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$, что

$$\|(I - P_\eta) P\| \geqslant \eta/(\mu^2 + \eta^2)^{1/2}. \tag{1.13}$$

Число $\lambda=0$ является собственным для A^*A. Число $\lambda=\mu^2$ либо собственное, либо принадлежит непрерывному спектру; для простоты примем, что оно тоже собственное. Итак, $A^*Au_0=0$, $A^*Au_1=\mu^2u_1$ для иекоторых u_0, $u_1\in H$, $\|u_0\|=\|u_1\|=1$; при этом $\langle u_0, u_1\rangle=0$. Для $z_1=\mu^{-1}Au_1$ нмеем $\|z_1\|^2=\mu^{-2}\langle A^*Au_1, u_1\rangle=1$. Оператор A_η определим формулой

$$A_\eta u=Au+\eta\langle u, u_0\rangle z_1,\ u\in H.$$

Тогда $\|A_\eta-A\|=\eta$ и $A_\eta(u_0-\mu^{-1}\eta u_1)=0$, т. е. $u_0-\mu^{-1}\eta u_1\in\mathcal{N}(A_\eta)\subseteq(I-P_\eta)H$. Поскольку $u_1\in PH$, то

$$\|(I-P_\eta)P\|\geqslant\|(I-P_\eta)u_1\|\geqslant\frac{|\langle u_1, u_0-\mu^{-1}\eta u_1\rangle|}{\|u_0-\mu^{-1}\eta u_1\|}=\frac{\eta}{(\mu^2+\eta^2)^{1/2}},$$

т. е. имеет место (1.13).

2. Регуляризация нормально разрешимых задач

2.1. **Класс методов регуляризации.** Пусть требуется решить уравнение

$$Au=f, \tag{2.1}$$

где $A\in\mathcal{L}(H, F)$ — линейный ограниченный оператор из гильбертова пространства H в гильбертово пространство F с замкнутой областью значений $\mathcal{R}(A)\subseteq F$. Напомним, что условие замкнутости $\mathcal{R}(A)$ равносильно условию

$$\mu\equiv\inf_{u\in H, u\perp\mathcal{N}(A), \|u\|=1}\|Au\|>0. \tag{2.2}$$

Если $f\in\mathcal{R}(A)$, то уравнение (2.1) разрешимо в обычном смысле. Если же $f\overline{\in}\mathcal{R}(A)$, то ставится задача о вычислении псевдорешения уравнения (2.1), т. е. элемента $u_*\in H$, минимизирующего невязку $\|Au-f\|$ и имеющего среди миимизирующих элементов наименьшую норму. Для нормально разрешимой задачи (2.1) псевдорешение существует и единственно при любом $f\in F$; оно дается формулой $u_*=A^+f$, где A^+ — псевдообратиый к A. При $f\in\mathcal{R}(A)$ псевдорешение совпадает с нормальным решением (решение наименьшей нормы).

Пусть вместо точных данных $f\in F$, $A\in\mathcal{L}(H, F)$ в нашем распоряжении $f_\delta\in F$, $A_\eta\in\mathcal{L}(H, F)$,

$$\|f_\delta-f\|\leqslant\delta, \tag{2.3}$$

$$\|A_\eta-A\|\leqslant\eta,\qquad 0<\eta<\mu/2. \tag{2.4}$$

В случае $\mathcal{N}(A)\neq0$ и (или) $\mathcal{R}(A)\neq F$ задача (2.1) требует регуляризации. С этой целью мы привлекаем класс методов, введенный в гл. II.

Пусть $\{g_r\}_{r\in(0,\infty)}$ — семейство измеримых по Борелю функций g_r: $[0, a]\to R$, $a\geqslant\|A_\eta\|^2$ $(0<\eta<\mu/2)$, таких, что при всех $r>0$ имеют место неравенства

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}|g_r(\lambda)|\leqslant\gamma r,\quad \gamma=\text{const}, \tag{2.5}$$

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^p |1-\lambda g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_p r^{-p}, \qquad \gamma_p = \mathrm{const},\ p \geqslant 1, \tag{2.6}$$

$$0 \leqslant 1-\lambda g_r(\lambda) \leqslant 1 \quad (0\leqslant\lambda\leqslant a) \tag{2.7}$$

(условие (2.6) ниже понадобится лишь при фиксированном $p \geqslant 1$). Приближения к псевдорешению $u_* = A^+f$ уравнения (2.1) построим в виде

$$u_r = g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* f_\delta, \tag{2.8}$$

$$\overline{u_r} = g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* A_\eta u_r = \bar{g}_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* f_\delta, \qquad \bar{g}_r(\lambda) = \lambda g_r^2(\lambda). \tag{2.9}$$

Из (2.5)—(2.7) вытекают такие же неравенства для функций $\bar{g}_r$:

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} |\bar{g}_r(\lambda)| \leqslant \bar{\gamma} r, \qquad \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^p |1-\lambda\bar{g}_r(\lambda)| \leqslant \bar{\gamma}_p r^{-p}, \tag{2.10}$$

$$0 \leqslant 1-\lambda\bar{g}_r(\lambda) \leqslant 1 \qquad (0\leqslant\lambda\leqslant a).$$

При этом $\bar{\gamma} \leqslant \gamma$, $\bar{\gamma}_p \leqslant 2\gamma_p$.

На уровне замечаний и дополнений будем обсуждать и случай, когда (2.7) нарушено; при этом можно допустить и комплексозначность функций $g_r(\lambda)$. Этим объясняется форма записи условий (2.5) и (2.6), не учитывающая (2.7).

2.2. **Априорный выбор параметра регуляризации.** Напомним, что μ_η^2 — наименьшая точка спектра оператора $A_\eta^* A_\eta$ вне $[0, \eta^2]$.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (2.2)—(2.7), причем в (2.6) $p=1$. Тогда при $r = (\gamma\mu_\eta\eta)^{-1}$, а также при $r = (\gamma\mu\eta)^{-1}$ справедливы следующие оценки погрешности: в случае $f \in \mathscr{R}(A)$ для приближения (2.8)

$$\|u_r - A^+f\| \leqslant \frac{\delta + [1 + (1+\gamma^2\gamma_1^2)^{1/2}] \|A^+f\| \eta}{\mu - \eta}; \tag{2.11}$$

в случае произвольного $f \in F$ для приближения (2.9)

$$\|\bar{u}_r - A^+f\| \leqslant \frac{\delta + [1 + (1+\gamma^2\bar{\gamma}_1^2)^{1/2}] \|A^+f\| \eta}{\mu - \eta} + \frac{\|f - Qf\|}{(\mu-\eta)^2}\eta. \tag{2.12}$$

Доказательство. Имеют место равенства

$$u_r - u_* = -K_{r\eta} u_* + g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u_*), \tag{2.13}$$

$$\bar{u}_r - u_* = -\bar{K}_{r\eta} u_* + \bar{g}_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u_*), \tag{2.14}$$

где $u_* = A^+f$ — псевдорешение уравнения (2.1), функция $\bar{g}_r(\lambda)$ определена в (2.9),

$$K_{r\eta} = I - A_\eta^* A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta), \qquad \bar{K}_{r\eta} = I - A_\eta^* A_\eta \bar{g}_r(A_\eta^* A_\eta). \tag{2.15}$$

Поскольку $Pu_* = u_*$, а P_η коммутирует с функциями от оператора $A_\eta^* A_\eta$, то

$$\|K_{r\eta} u_*\|^2 = \|P_\eta K_{r\eta} u_*\|^2 + \|K_{r\eta}(I - P_\eta) Pu_*\|^2.$$

При помощи неравенств (2.6), (2.7) и (1.11) оценим

$$\|P_\eta K_{r\eta}\| \leqslant \sup_{\mu_\eta^2 \leqslant \lambda \leqslant a} |1-\lambda g_r(\lambda)| \leqslant \mu_\eta^{-2} \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda |1-\lambda g_r(\lambda)| \leqslant \mu_\eta^{-2}\gamma_1 r^{-1}, \tag{2.16}$$

$$\|K_{r\eta}(I-P_\eta)P\| \leqslant \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant\eta^2} |1-\lambda g_r(\lambda)| \, \|(I-P_\eta)P\| \leqslant (\mu-\eta)^{-1}\eta. \tag{2.17}$$

В итоге

$$\|K_{r\eta}u_*\| \leqslant [\mu_\eta^{-4}\gamma_1^2 r^{-2} + (\mu-\eta)^{-2}\eta^2]^{1/2} \|u_*\|. \tag{2.18}$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\|\bar{K}_{r\eta}u_*\| \leqslant [\mu_\eta^{-4}\bar{\gamma}_1^2 r^{-2} + (\mu-\eta)^{-2}\eta^2]^{1/2} \|u_*\| \tag{2.19}$$

(мы учли, что функция $\bar{g}_r(\lambda)$ удовлетворяет аналогам условий (2.6), (2.7)). Далее, в силу (1.8)

$$\|g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^*\| = \sup_{\lambda\in\sigma(A_\eta^* A_\eta)} \lambda^{1/2} |g_r(\lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant \max \{\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant\eta^2} \lambda^{1/2}|g_r(\lambda)|, \sup_{\mu_\eta^2\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^{1/2}|g_r(\lambda)|\} \leqslant$$

$$\leqslant \max \{\eta \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant\eta^2} |g_r(\lambda)|, \mu_\eta^{-1} \sup_{\mu_\eta^2\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda |g_r(\lambda)|\}$$

и неравенства (2.5) и (2.7) приводят к оценке

$$\|g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^*\| \leqslant \max\{\gamma r\eta, \mu_\eta^{-1}\} \equiv c_{r\eta}. \tag{2.20}$$

С учетом равенства $\bar{g}_r(\lambda) = \lambda g_r^2(\lambda)$ (см. (2.9)) получаем аналогичным образом

$$\|\bar{g}_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^*\| \leqslant \max\{\gamma^2 r^2 \eta^3, \mu_\eta^{-1}\} \equiv \bar{c}_{r\eta}, \tag{2.21}$$

$$\|\bar{g}_r(A_\eta^* A_\eta)\| \leqslant c_{r\eta}^2. \tag{2.22}$$

Если $f\in\mathcal{R}(A)$, то $Au_*=f$, $f_\delta - A_\eta u_* = (f_\delta - f) + (A-A_\eta)u_*$, и оценка (2.20) дает

$$\|g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u_*)\| \leqslant c_{r\eta}(\delta + \|u_*\|\eta). \tag{2.23}$$

Если $f\in F$ произволен, то $Au_* = Qf$, $f_\delta - A_\eta u_* = (f_\delta - f) + (A-A_\eta)u_* + (f-Qf)$, и с учетом равенства $A^*(I-Q)=0$ оценки (2.21) и (2.22) дают

$$\|\bar{g}_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u_*)\| \leqslant \bar{c}_{r\eta} \|(f_\delta - f) + (A-A_\eta)u_*\| +$$

$$+ c_{r\eta}^2 \|(A_\eta^* - A^*)(I-Q)f\| \leqslant \bar{c}_{r\eta}(\delta + \|u_*\|\eta) + c_{r\eta}^2\|f-Qf\|\eta. \tag{2.24}$$

Неравенства (2.18), (2.19), (2.23) и (2.24) позволяют оценить погрешности $\|u_r - u_*\|$ и $\|\bar{u}_r - u_*\|$ (см. (2.13) и (2.14)) при любом $r>0$. При $r=(\gamma\mu_\eta\eta)^{-1}$ и при $r=(\gamma\mu\eta)^{-1}$ имеем

$$\gamma r\eta \leqslant (\mu-\eta)^{-1}, \qquad \gamma^2 r^2\eta^3 \leqslant (\mu-\eta)^{-2}\eta \leqslant (\mu-\eta)^{-1},$$

и мы приходим к оценкам (2.11) и (2.12). Теорема 2.1 доказана.

Оценки (2.11) и (2.12) говорят о том, что погрешности приближений u_r и $\bar{u}_r$ имеют такой же порядок малости, что и погрешности исходных данных задачи. Такая точность приближенного решения достижима только в случае нормально разрешимых задач.

Если условие (2.7) нарушено, то вместо (2.17) и (2.20) получаем

$$\|K_{r\eta}(I-P_\eta)P\| \leqslant (1+\gamma r\eta^2)(\mu-\eta)^{-1}\eta,$$

$$\|g_r(A_\eta^* A_\eta)A_\eta^*\| \leqslant \max\{\gamma r\eta,\ \mu_\eta^{-1}(1+\mu_\eta^{-2}\gamma_1 r^{-1})\}.$$

Остальные детали рассуждений не изменятся, и оценки (2.11) и (2.12) лишь слегка видоизменятся.

2.3. **Случай методов высокой квалификации.** Если условие (2.6) выполнено с $p>1$, то возможно некоторое уточнение оценок (2.11) и (2.12). Но более важно то обстоятельство, что параметр r можно выбирать меньшим, чем указано в теореме 2.1.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия (2.2)—(2.7), причем в (2.6) $p>1$. Если $f\in\mathscr{R}(A)$, то для приближения (2.8) при

$$(\gamma_p/\varepsilon_1)^{1/p}\mu_\eta^{-2+\frac{1}{p}}\eta^{-1/p} \leqslant r \leqslant \varepsilon_2(\gamma\mu_\eta\eta)^{-1},\ \varepsilon_1>0,\ 0<\varepsilon_2\leqslant 1 \tag{2.25}$$

справедлива оценка

$$\|u_r-A^+f\| \leqslant \frac{\delta+[(1+\varepsilon_1)^2+1\,(+\varepsilon_2)^2]^{1/2}\|A^+f\|\eta}{\mu-\eta}. \tag{2.26}$$

Для приближения (2.9) при любом $f\in F$ и

$$(\bar{\gamma}_p/\varepsilon_1)^{1/p}\mu^{-2+1/p}_\eta\eta^{-1/p} \leqslant r \leqslant \varepsilon_2(\gamma\mu_\eta\eta)^{-1},\ \varepsilon_1>0,\ 0<\varepsilon_2\leqslant 1 \tag{2.27}$$

справедлива оценка

$$\|\bar{u}_r-A^+f\| \leqslant \frac{\delta+[(1+\varepsilon_1)^2+(1+\varepsilon_2^2(\mu-\eta)^{-1}\eta)^2]^{1/2}\|A^+f\|\eta}{\mu-\eta}+$$

$$+\frac{\|f-Qf\|}{(\mu-\eta)^2}\eta. \tag{2.28}$$

Доказательство. Перегруппируем члены в (2.13) и (2.14):

$$u_r-u_*=v_r+w_r,\quad \bar{u}_r-u_*=\bar{v}_r+\bar{w}_r, \tag{2.29}$$

где

$$v_r=-K_{r\eta}u_*+g_r(A_\eta^* A_\eta)A_\eta^*(A-A_\eta)u_*,$$

$$\bar{v}_r=-\bar{K}_{r\eta}u_*+\bar{g}_r(A_\eta^* A_\eta)A_\eta^*(A-A_\eta)u_*,$$

$$w_r=g_r(A_\eta^* A_\eta)A_\eta^*(f_\delta-f)\quad (f\in\mathscr{R}(A)),$$

$$\bar{w}_r=\bar{g}_r(A_\eta^* A_\eta)A_\eta^*[(f_\delta-f)+(f-Qf)].$$

В силу неравенств (2.20)—(2.22) и верхних ограничений на r, которые в (2.25) и (2.27) одинаковы, имеем

$$\|w_r\| \leqslant c_{n\eta}\delta \leqslant \mu_\eta^{-1}\delta, \tag{2.30}$$

$$\|\bar{w}_r\| \leqslant \bar{c}_{r\eta}\delta + c_{r\eta}^2 \|f - Qf\| \eta \leqslant \mu_\eta^{-1}\delta + \mu_\eta^{-2} \|f - Qf\| \eta. \tag{2.31}$$

Далее, используя некоторые детали доказательства теоремы 2.1, оценим отдельно

$$\|P_\eta v_r\| \leqslant [\mu_\eta^{-2p}\gamma_p r^{-p} + \mu_\eta^{-1}\eta] \|u_*\|,$$

$$\|P_\eta \bar{v}_r\| \leqslant [\mu_\eta^{-2p}\bar{\gamma}_p r^{-p} + \mu_\eta^{-1}\eta] \|u_*\|,$$

$$\|(I - P_\eta) v_r\| \leqslant [(\mu - \eta)^{-1}\eta + \gamma r \eta^2] \|u_*\|,$$

$$\|(I - P_\eta) \bar{v}_r\| \leqslant [(\mu - \eta)^{-1}\eta + \gamma^2 r^2 \eta^4] \|u_*\|.$$

Отсюда при выполнении (2.25) и (2.27) получаем соответственно

$$|v_r\| = (\|P_\eta v_r\|^2 + \|(I - P_\eta) v_r\|^2)^{1/2} \leqslant [(1 + \varepsilon_1)^2 + \\ + (1 + \varepsilon_2)^2]^{1/2} \|u_*\| (\mu - \eta)^{-1} \eta, \tag{2.32}$$

$$\|\bar{v}_r\| \leqslant [(1 + \varepsilon_1)^2 + (1 + \varepsilon_2^2 (\mu - \eta)^{-1} \eta)^2]^{1/2} \|u_*\| (\mu - \eta)^{-1} \eta. \tag{2.33}$$

Из (2.29) — (2.33) вытекают оценки (2.26) и (2.28). Теорема 2.2 доказана.

При достаточно малых η величины ε_1 и ε_2 в (2.25) и (2.27) удается выбрать сколь угодно малыми; здесь существенно, что условие (2.6) справедливо с $p > 1$. Например, при

$$r = (\gamma_p/\gamma)^{1/(p+1)} \mu_\eta^{-2p/(p+1)} \eta^{-2/(p+1)}$$

оценка (2.26) справедлива с

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \gamma^{p/(p+1)} \gamma_p^{1/(p+1)} (\eta \mu_\eta^{-1})^{(p-1)/(p+1)}.$$

Впрочем, теорема 2.2 верна и при $p = 1$, только тогда ε_1 и ε_2 не удается выбрать малыми и оценка (2.26) уступает (2.11).

2.4. Вопрос о неулучшаемости оценок. Оценки (2.11), (2.12), (2.26) и (2.28) имеют неулучшаемый порядок не только по δ и η, но и по μ. Ниже указан пример, в котором обратные неравенства

$$\|u_r - A^+ f\| \geqslant \frac{\delta + \|A^+ f\| \eta}{\mu + \eta}, \qquad f \in \mathcal{R}(A), \tag{2.34}$$

$$\|\bar{u}_r - A^+ f\| \geqslant \left[\left(\frac{\delta + \|A^+ f\| \eta}{\mu + \eta} \right)^2 + \theta_r \left(\frac{\|f - Qf\|}{\mu^2 + \eta^2} \eta \right)^2 \right]^{1/2}, \quad 0 < \theta_r < 1, \tag{2.35}$$

справедливы при всех $r > 0$, причем $\theta_r \to 1$ при $r \to \infty$.

Допустим, что μ^2 является для $A^* A$ собственным значением кратности 2 или более:

$$A^* A u_i = \mu^2 u_i, \quad \|u_i\| = 1 \quad (i = 1, 2), \quad \langle u_1, u_2 \rangle = 0.$$

Обозначая $z_i = \mu^{-1} A u_i$ $(i = 1, 2)$, имеем

$$A u_i = \mu z_i, \quad A^* z_i = \mu u_i, \quad \|z_i\| = 1 \quad (i = 1, 2), \quad \langle z_1, z_2 \rangle = 0.$$

Допустим также, что $\mathscr{N}(A^*)$ нетривиально, $z_0 \in \mathscr{N}(A^*)$, $\|z_0\|=1$; тогда $\langle z_0, z_i\rangle=0$ $(i=1, 2)$. Положим

$$u_* = bu_1,\ \text{т. е. } Qf = b\mu z_1\ (b=\|u_*\|>0),$$

$$f = Qf + \beta z_0\ (\beta = \|f - Qf\| \geqslant 0),$$

$$f_\delta = f - \delta z_1,\ A_\eta = A + \eta\langle\cdot, u_1\rangle z_1 + \eta\langle\cdot, u_2\rangle z_0.$$

Тогда $\|f_\delta - f\| = \delta$, $\|A_\eta - A\| = \eta$,

$$A_\eta{}^* = A^* + \eta\langle\cdot, z_1\rangle u_1 + \eta\langle\cdot, z_0\rangle u_2.$$

Нетрудно видеть, что

$$A_\eta u_1 = (\mu + \eta)\, z_1, \qquad A_\eta^* z_1 = (\mu + \eta)\, u_1,$$

$$A_\eta u_2 = \mu z_2 + \eta z_0, \qquad A_\eta^* (\mu z_2 + \eta z_0) = (\mu^2 + \eta^2)\, u_2,$$

поэтому

$$A_\eta^* \ {}_\eta u_1 = (\mu + \eta)^2\, u_1, \qquad A_\eta^* A_\eta u_2 = (\mu^2 + \eta^2)\, u_2,$$

$$A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u_*) = -(\mu + \eta)\,(\delta + b\eta)\, u_1 + \beta\eta u_2.$$

Равенство (2.13) в данном случае имеет вид

$$u_r - u_* = -[1 - (\mu + \eta)^2 g_r((\mu + \eta)^2)]\, bu_1 - \\ - g_r((\mu + \eta)^2)\,(\mu + \eta)\,(\delta + b\eta)\, u_1 + g_r(\mu^2 + \eta^2)\, \beta\eta u_2;$$

равенство (2.14) выглядит так же, лишь функция g_r заменяется на $\bar{g}_r$. Отсюда

$$\|u_r - u_*\|^2 = \left\{[1 - (\mu + \eta)^2 g_r((\mu + \eta)^2)]\, b + (\mu + \eta)^2 g_r((\mu + \eta)^2)\, \frac{\delta + b\eta}{\mu + \eta}\right\}^2 + \\ + \left[(\mu^2 + \eta^2)\, g_r(\mu^2 + \eta^2)\, \frac{\beta}{\mu^2 + \eta^2}\, \eta\right]^2 \geqslant \left[\min\left\{b, \frac{\delta + b\eta}{\mu + \eta}\right\}\right]^2 + \\ + \left[(\mu^2 + \eta^2)\, g_r(\mu^2 + \eta^2)\, \frac{\beta}{\mu^2 + \eta^2}\, \eta\right]^2. \tag{2.36}$$

При $\beta=0$ имеем $f \in \mathscr{R}(A)$, и если δ и η достаточно малы (если $(\delta + b\eta)/(\mu + \eta) \leqslant b$), то оценка (2.36) приобретает вид (2.34). Заменяя g_r на $\bar{g}_r$ и учитывая, что в силу (2.10) $\lambda \bar{g}_r(\lambda) \to 1$ при $r \to \infty, \lambda \neq 0$, из (2.36) получаем также оценку (2.35).

Нетрудно также сообразить, что условия (2.5)—(2.7) недостаточны для оценки вида $\|u_r - u_*\| \leqslant c(\mu)\,(\delta + \|u_*\|\eta)$ для приближения (2.8), если $f \overline{\in} \mathscr{R}(A)$. Выбор $r = d\eta^{-1/(p+1)}$ ($d = \text{const} > 0$; p из условия (2.6)) дает при любом $f \in F$ точность $\|u_r - u_*\| = O(\delta + \eta^{p/(p+1)})$.

2.5. **Аппроксимация псевдообратного оператора.** Приближения (2.8) и (2.9) можно записать в виде

$$u_r = B_{r\eta} f_\delta,\ \bar{u}_r = \bar{B}_{r\eta} f_\delta,$$

где

$$B_{r\eta} = g_r(A_\eta^* A_\eta)\, A_\eta^*, \qquad \bar{B}_{r\eta} = B_{r\eta} A_\eta B_{r\eta}. \tag{2.37}$$

Эти операторы аппроксимируют A^+.

Теорема 2.3. Пусть выполнены условия (2.2) и (2.4) — (2.7). Если в (2.6) $p=1$, то при $r = (\gamma\mu_\eta\eta)^{-1}$ справедлива оценка

$$\|\bar{B}_{r\eta} - A^+\| \leqslant \frac{\{1 + [1 + (1 + \gamma^2\bar{\gamma}_1^2)^{1/2}]^2\}^{1/2}}{(\mu - \eta)^2}\, \eta. \tag{2.38}$$

Если в (2.6) $p>1$, то при r, указанном в (2.27), справедлива оценка

$$\|\overline{B}_{r\eta}-A^{+}\|\leqslant\frac{\{1+(1+\varepsilon_1)^2+[1+\varepsilon_2^2(\mu-\eta)^{-1}\eta]^2\}^{1/2}}{(\eta-\eta)^2}\,\eta. \tag{2.39}$$

Доказательство немедленно вытекает из (2.12) и (2.28) (при $f_\delta=f$, т. е. $\delta=0$), если учесть, что $\|A^{+}f\|\leqslant\mu^{-1}\|Qf\|$ и

$c_1\|Qf\|+c_2\|(I-Q)f\|\leqslant(c_1^2+c_2^2)^{1/2}\|f\|$.

Доказательство теоремы 2.3 завершено.

В отличие от $\overline{B}_{r\eta}$ оператор $B_{r\eta}$ аппроксимирует A^{+}, вообще говоря, лишь на $\mathcal{R}(A)$. Но он может быть использован при аппроксимации проекторов на $\mathcal{R}(A^{*})$ и $\mathcal{R}(A)$.

2.6. **Аппроксимация проекторов на область значений и нуль-подпространство оператора.** Напомним, что P и Q — ортопроекторы, проектирующие соответственно на $\mathcal{R}(A^{*})$ и $\mathcal{R}(A)$.

Теорема 2.4. Пусть выполнены условия (2.2) и (2.4) — (2.7). Тогда при r, указанных в (2.25), справедливы оценки

$$\|B_{r\eta}A_\eta-P\|\leqslant\frac{1+\varepsilon}{\mu-\eta}\,\eta,\quad \|A_\eta B_{r\eta}-Q\|\leqslant\frac{1+\varepsilon}{\mu-\eta}\,\eta, \tag{2.40}$$

$\varepsilon=\max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$.

Доказательство. Имеет место равенство см. обозначение (2.15))

$$B_{r\eta}A_\eta-P=B_{r\eta}A_\eta(I-P)-K_{r\eta}P=-P_\eta K_{r\eta}P-$$
$$-(I-P_\eta)K_{r\eta}P+P_\eta B_{r\eta}A_\eta(I-P)+(I-P_\eta)B_{r\eta}A_\eta(I-P).$$

Ортогональные разложения

$$H=PH\oplus(I-P)H,\quad H=P_\eta H\oplus(I-P_\eta)H$$

порождают представление оператора $B_{r\eta}A_\eta-P$ в виде матричного оператора

$$C_{r\eta}=\begin{pmatrix}-P_\eta K_{r\eta}P & P_\eta B_{r\eta}A_\eta(I-P)\\ -(I-P_\eta)K_{r\eta}P & (I-P_\eta)B_{r\eta}A_\eta(I-P)\end{pmatrix}.$$

Аналогично тому, как в теоремах 2.1 и 2.2, оценим

$$\|P_\eta K_{r\eta}P\|\leqslant\sup_{\mu_\eta^2\leqslant\lambda\leqslant a}|1-\lambda g_r(\lambda)|\leqslant\mu_\eta^{-2p}\gamma_p r^{-p}\leqslant\varepsilon_1\mu_\eta^{-1}\eta\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_1(\mu-\eta)^{-1}\eta,$$
$$\|(I-P_\eta)K_{r\eta}P\|\leqslant\|(I-P_\eta)P\|\leqslant(\mu-\eta)^{-1}\eta,$$
$$\|P_\eta B_{r\eta}A_\eta(I-P)\|\leqslant\|P_\eta(I-P)\|\leqslant(\mu-\eta)^{-1}\eta,$$
$$\|(I-P_\eta)B_{r\eta}A_\eta(I-P)\|\leqslant\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant\eta^2}\lambda|g_r(\lambda)|\leqslant\gamma r\eta^2\leqslant\varepsilon_2\mu_\eta^{-1}\eta\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_2(\mu-\eta)^{-1}\eta.$$

Итак, нормы элементов матрицы $C_{r\eta}$ оцениваются соответствующими элементами числовой матрицы

$$(\mu-\eta)^{-1}\eta\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 1\\ 1 & \varepsilon_2\end{pmatrix};$$

норма (наибольшее собственное число) последней матрицы оценивается через

$$(\mu-\eta)^{-1}\eta\max\{1+\varepsilon_1, 1+\varepsilon_2\}.$$

Как нетрудно сообразить, такую же оценку имеет норма оператора $B_{r\eta}A_\eta-P$, порождающего матричный оператор $C_{r\eta}$. Этим доказана первая из оценок (2.40). Вторая доказывается аналогично. Теорема 2.4 доказана.

В теореме 2.4 соединены случаи условия (1.6) с $p=1$ и $p>1$. Различие этих случаев выявляется при рассмотрении тех ε_1 и ε_2, для которых существуют удовлетворяющие (2.25) r. Как уже отмечалось, при $p>1$ параметр $r=r(\eta)$ удается выбрать так, что (2.25) выполнено с $\varepsilon_1=\varepsilon_1(\eta)\to 0$, $\varepsilon_2=\varepsilon_2(\eta)\to 0$ при $\eta\to 0$. В таком случае сравнение оценок (2.40) и (1.10) показывает, что $B_{r(\eta),\eta}A_\eta$ и $A_\eta B_{r(\eta),\eta}$ аппроксимируют P и Q с той же асимптотической точностью, что и P_η и Q_η; напомним, что оценки (1.10) асимптотически точны.

С таким же успехом P и Q можно аппроксимировать операторами $\bar{B}_{r\eta}A_\eta$ и $A_\eta\bar{B}_{r\eta}$.

Операторы $I-P$ и $I-Q$ являются ортопроекторами, проектирующими, соответственно на $\mathcal{N}(A)$ и $\mathcal{N}(A^*)$. Они аппроксимируются операторами

$$K_{r\eta}=I-B_{r\eta}A_\eta=I-A_\eta^*A_\eta g_r(A_\eta^*A_\eta),$$
$$\tilde{K}_{r\eta}=I-A_\eta B_{r\eta}=I-A_\eta A_\eta^* g_r(A_\eta A_\eta^*)$$

с той же точностью, с какой P и Q аппроксимируются операторами $B_{r\eta}A_\eta$ и $A_\eta B_{r\eta}$ (см. теорему 2.4).

При помощи матричной техники, использованной в доказательстве теоремы 2.4, можно несколько улучшить и оценку (2.39).

2.7. **Апостериорный выбор параметра по невязке.** Если $f\in\mathcal{R}(A)$, то для приближения (2.8) в условиях (2.3) — (2.7) имеем

$$\lim_{r\to\infty}\|A_\eta u_r-f_\delta\|\leqslant\delta+\|u_*\|\eta,\qquad u_*=A^+f$$

(см. гл. IV, п. 3.1). Параметр r можно апостериорным образом подобрать, так, чтобы

$$\|A_\eta u_r-f_\delta\|=b(\delta+\|u_*\|\eta),\quad b>1 \tag{2.41}$$

или

$$\|A_\eta u_r-f_\delta\|=b(\delta+\|u_r\|\eta),\quad b>1. \tag{2.42}$$

Будем смотреть на b как на параметр, который можно менять. Это позволяет на основе формулируемой ниже теоремы судить о точности приближения u_r при разных r, соответствующих разным уровням невязки. Кроме того, это позволяет перенести различие $\|u_*\|$ и $\|u_r\|$ в b. Точные формулировки проводим для принципа невязки в форме (2.41), но сказанное позволяет судить и о точности приближений, найденных по принципу невязки в практической форме (2.42).

Подчеркнем, что привлечение принципа невязки возможно безо всякой информации о μ и без вычислений его приближения μ_η. Тем не менее, как показывает сравнение доказываемой ниже теоремы с теоремами 2.1 и 2.2, принцип невязки выдает значение $r=r(\delta,\eta)$, при котором приближение u_r по точности сравнимо с точностью, достигаемой априорным выбором r при известных μ или μ_η.

Теорема 2.5. Пусть выполнены условия (2.2) — (2.7), $f\in\mathscr{R}(A)$, $b>\mu(\mu-\eta)^{-1}$. Пусть параметр $r=r(\delta,\eta)$ в приближении (2.8) подобран так, что выполнено (2.41). Тогда

$$\|u_r-A^+f\|\leqslant\{(b+1+\varepsilon_\eta)\delta+(b+2+\varepsilon_\eta)\|A^+f\|\eta\}/(\mu-\eta), \tag{2.43}$$

где

$$\varepsilon_\eta=\gamma\gamma_p^{1/p}\,[b-\mu(\mu-\eta)^{-1}]^{-1/p}\,[\eta(\mu-\eta)^{-1}]^{1-1/p}; \tag{2.44}$$

если (2.6) выполнено с $p>1$, то $\varepsilon_\eta\to0$ при $\eta\to0$.

Доказательство. Из (2.41) следует, что

$$\begin{aligned}\|(A_\eta^*A_\eta)^{1/2}P_\eta(u_r-u_*)\|&=\|P_\eta(A_\eta^*A_\eta)^{1/2}(u_r-u_*)\|\leqslant\\&\leqslant\|(A_\eta^*A_\eta)^{1/2}(u_r-u_*)\|=\|A_\eta(u_r-u_*)\|\leqslant\|A_\eta u_r-f_\delta\|+\\&+\|f_\delta-A_\eta u_*\|\leqslant(b+1)(\delta+\|u_*\|\eta),\end{aligned}$$

поэтому

$$\|P_\eta(u_r-u_*)\|\leqslant(\mu-\eta)^{-1}(b+1)(\delta+\|u_*\|\eta). \tag{2.45}$$

Из (2.13) рассуждениями, проведенными при доказательстве теоремы 2.1, получаем

$$\|(I-P_\eta)(u_r-u_*)\|\leqslant(\mu-\eta)^{-1}\eta\|u_*\|+\gamma r\eta(\delta+\|u_*\|\eta). \tag{2.46}$$

Остается оценить $r=r(\delta,\eta)$. В основу положим равенство

$$A_\eta u_r-f_\delta=-(I-A_\eta A_\eta^* g_r(A_\eta A_\eta^*))f_\delta=-\widetilde{K}_{r\eta}f_\delta.$$

Мы учли, что $g_r(A_\eta^*A_\eta)A_\eta^*=A_\eta^*g_r(A_\eta A_\eta^*)$ (см. лемму 3.1 гл. II). Переписав это равенство в виде

$$A_\eta u_r-f_\delta=\widetilde{K}_{r\eta}(A_\eta u_*-f_\delta)-\widetilde{K}_{r\eta}A_\eta P_\eta u_*-\widetilde{K}_{r\eta}A_\eta(I-P_\eta)^2Pu_*,$$

на основе (2.41) и выкладок, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы 2.1, находим

$$\begin{aligned}b(\delta+\|u_*\|\eta)\leqslant(\delta+\|u_*\|\eta)+(\mu-\eta)^{1-2p}\gamma_p r^{-p}\|u_*\|+\\+\eta^2(\mu-\eta)^{-1}\|u_*\|',\end{aligned}$$

или

$$(b-1)(\delta+\|u_*\|\eta)-\eta^2(\mu-\eta)^{-1}\|u_*\|\leqslant(\mu-\eta)^{1-2p}\gamma_p r^{-p}\|u_*\|.$$

Отбросив в левой части положительный член $(b-1)\delta$ и разделив на $\|u_*\|$, получаем

$$[b-\mu(\mu-\eta)^{-1}]\eta \leqslant (\mu-\eta)^{1-2p}\gamma_p r^{-p}.$$

Отсюда

$$r \leqslant \gamma_p^{1/p}[b-\mu(\mu-\eta)\ {}^{1}]^{-1/p}(\mu-\eta)^{-2+1/p}\eta^{-1/p}. \tag{2.47}$$

Из (2.45) — (2.47) следует оценка (2.43), (2.44). Теорема 2.5 доказана.

Аналогичный результат справедлив и для приближения $\bar{u}_r$, если $f \in \mathscr{R}(A)$. Случай произвольного $f \in F$ обсуждается в следующем пункте.

2.8. **Использование второй невязки.** По лемме 3.1 гл. III для приближения (2.9) при условиях (2.10) имеем $\|A_\eta^*(A_\eta\bar{u}_r - f_\delta)\| \to 0$ при $r \to \infty$.

Теорема 2.6. Пусть выполнены условия (2.2) — (2.7), и пусть параметр $r = r(\delta, \eta)$ в приближении (2.9) подобран так, что

$$\|A_\eta^*(A_\eta\bar{u}_r - f_\delta)\| = b\|f_\delta\|\eta, \qquad b > 1. \tag{2.48}$$

Тогда

$$\|\bar{u}_r - A^+f\| \leqslant \frac{(1+\varepsilon_\eta'')\delta + (2+\varepsilon_\eta'')\|A^+f\|\eta}{\mu-\eta} +$$
$$+ \frac{b\|f_\delta\| + (1+\varepsilon_\eta')\|f-Qf\|}{(\mu-\eta)^2}\ \eta, \tag{2.49}$$

где

$$\varepsilon_\eta' = \{\gamma\bar{\gamma}_p^{1/p}(b^2-1)^{-1/(2p)}[\eta(\mu-\eta)^{-1}]^{1-1/p}\}^2, \tag{2.50}$$

$$\varepsilon_\eta'' = \varepsilon_\eta'(\mu-\eta)^{-1}\eta \to 0 \text{ при } \eta \to 0; \tag{2.51}$$

если (2.6) выполнено с $p > 1$, то $\varepsilon_\eta' \to 0$ при $\eta \to 0$.

Доказательство. Из (2.48) следует, что

$$\|Q_\eta(A_\eta\bar{u}_r - f_\delta)\| \leqslant (\mu-\eta)^{-1}b\|f_\delta\|\eta.$$

Поскольку $Au_* = Qf$, то для

$$Q_\eta(f_\delta - A_\eta u_*) = Q_\eta(f_\delta - f) + Q_\eta(A - A_\eta)u_* + Q_\eta(I-Q)f$$

при помощи (1.12) находим

$$\|Q_\eta(f_\delta - A_\eta u_*)\| \leqslant \delta + \|u_*\|\eta + (\mu-\eta)^{-1}\eta\|f-Qf\|.$$

На основании двух последних неравенств

$$\|Q_\eta A_\eta(\bar{u}_r - u_*)\| \leqslant \delta + \|u_*\|\eta + (\mu-\eta)^{-1}(b\|f_\delta\| + \|f-Qf\|)\eta.$$

Отсюда с учетом равенства $Q_\eta A_\eta(\bar{u}_r - u_*) = A_\eta P_\eta(\bar{u}_r - u_*)$ получаем оценку

$$\|P_\eta(\bar{u}_r - u_*)\| \leqslant (\mu-\eta)^{-1}(\delta + \|u_*\|\eta) + (\mu-\eta)^{-2}(b\|f_\delta\| +$$
$$+ \|f-Qf\|)\eta. \tag{2.52}$$

Далее из (2.14) повторением некоторых деталей доказательства теоремы 2.1 находим

$$\|(I-P_\eta)(\bar{u}_r-u_*)\| \leqslant (\mu-\eta)^{-1}\eta\|u_*\|+\gamma^2r^2\eta^3(\delta+\|u_*\|\eta)+ \\ +(\gamma r\eta)^2\|f-Qf\|\eta. \tag{2.53}$$

Оценим $r=r(\delta,\eta)$. Имеем (см. обозначение (2.15))

$$A_\eta^*(A_\eta\bar{u}_r-f_\delta)=-\bar{K}_{r\eta}A_\eta^*f_\delta,$$

или

$$A_\eta^*(A_\eta\bar{u}_r-f_\delta)=-\bar{K}_{r\eta}P_\eta A_\eta^*f_\delta-\bar{K}_{r\eta}(I-P_\eta)A_\eta^*f_\delta.$$

Отсюда в силу (2.48) и (2.6)

$$(b\|f_\delta\|\eta)^2 \leqslant ((\mu-\eta)^{1-2p}\bar{\gamma}_p r^{-p}\|f_\delta\|)^2+(\eta\|f_\delta\|)^2,$$

что дает оценку

$$r \leqslant \bar{\gamma}_p^{1/p}(b^2-1)^{-1/(2p)}(\mu-\eta)^{-2+1/p}\eta^{-1/p}. \tag{2.54}$$

Из (2.52) — (2.54) следует оценка (2.49) — (2.51). Теорема 2.6 доказана.

3. Конкретизация результатов для метода А. Н. Тихонова и итерационных методов

3.1. **Приложение к методу А. Н. Тихонова.** Метод А. Н. Тихонова соответствует функциям

$$g_r(\lambda)=(\alpha+\lambda)^{-1}, \quad \alpha=r^{-1},$$

для которых условия (2.5) — (2.7) выполнены с $p=1$, $\gamma=1$, $\gamma_1=1$; в (2.10) $\bar{\gamma}_1=2$. При $p>1$ условие (2.6) нарушено. Приближения (2.8), (2.9) и (2.37) имеют вид

$$u_\alpha=(\alpha I+A_\eta^*A_\eta)^{-1}A_\eta^*f_\delta, \qquad \bar{u}_\alpha=(\alpha I+A_\eta^*A_\eta)^{-1}A_\eta^*A_\eta u_\alpha,$$
$$B_{\alpha\eta}=(\alpha I+A_\eta^*A_\eta)^{-1}A_\eta^*, \qquad \bar{B}_{\alpha\eta}=B_{\alpha\eta}A_\eta B_{\alpha\eta}.$$

Непосредственным следствием из теорем 2.1 и 2.3 — 2.6 является следующий результат.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (2.2) — (2.4). Тогда при $\alpha=\mu_\eta\eta$ (а также при $\alpha=\mu\eta$) справедливы оценки

$$\|u_\alpha-A^+f\| \leqslant \frac{\delta+(1+\sqrt{2})\|A^+f\|\eta}{\mu-\eta}, f\in\mathcal{R}(A), \tag{3.1}$$

$$\|\bar{u}_\alpha-A^+f\| \leqslant \frac{\delta+(1+\sqrt{5})\|A^+f\|\eta}{\mu-\eta}+\frac{\|f-Qf\|}{(\mu-\eta)^2}\eta, \ f\in F, \tag{3.2}$$

$$\|\bar{B}_{\alpha\eta}-A^+\| \leqslant \frac{(7+2\sqrt{5})^{1/2}}{(\mu-\eta)^2}\eta \approx \frac{3,387}{(\mu-\eta)^2}\eta, \tag{3.3}$$

$$\|B_{\alpha\eta}A_\eta-P\| \leqslant \frac{2\eta}{(\mu-\eta)}, \qquad \|A_\eta B_{\alpha\eta}-Q\| \leqslant \frac{2\eta}{\mu-\eta}. \tag{3.4}$$

Если $f \in \mathscr{R}(A)$ и α определено так, что

$$\|A_\eta u_\alpha - f_\delta\| = b(\delta + \|A^+ f\|\eta), \qquad c_\eta \equiv b - \mu(\mu - \eta)^{-1} > 0, \tag{3.5}$$

то

$$\|u_\alpha - A^+ f\| \leqslant \frac{(1 + b + c_\eta^{-1})\,\delta + (2 + b + c_\eta^{-1})\,\|A^+ f\|\,\eta}{\mu - \eta}. \tag{3.6}$$

Если $f \in F$ произвольно и α таково, что

$$\|A_\eta^* (A_\eta \bar{u}_\alpha - f_\delta)\| = b\|f_\delta\|\eta, \ b > 1, \tag{3.7}$$

то

$$\|\bar{u}_\alpha - A^+ f\| \leqslant \frac{(1 + \varepsilon_\eta)\,\delta + (2 + \varepsilon_\eta)\,\|A^+ f\|\,\eta}{\mu - \eta} + \\ + \frac{b\|f_\delta\| + [1 + 4(b^2 - 1)^{-1}]\,\|f - Qf\|}{(\mu - \eta)^2}\,\eta, \tag{3.8}$$

где $\varepsilon_\eta = 4(b^2 - 1)^{-1}(\mu - \eta)^{-1}\eta$.

В (3.5), (3.6) $c_\eta \to b - 1$ при $\eta \to 0$. Ориентируясь на это предельное значение и минимизируя оценку (3.6) по b, получаем, что для принципа невязки (3.5) можно рекомендовать значение $b = 2$.

3.2. Случай итерированного варианта метода А. Н. Тихонова. Зафиксируем натуральное число $m \geqslant 2$ и по начальным приближениям $u_{0,\alpha} = 0$, $\bar{u}_{0,\alpha} = 0$ вычислим m итераций

$$u_{n,\alpha} = (\alpha I + A_\eta^* A_\eta)^{-1} (\alpha u_{n-1,\alpha} + A_\eta^* f_\delta), \quad n = 1, \ldots, m, \tag{3.9}$$

$$\bar{u}_{n,\alpha} = (\alpha I + A_\eta^* A_\eta)^{-1} (\alpha \bar{u}_{n-1,\alpha} + A_\eta^* A_\eta u_{m,\alpha}), \quad n = 1, \ldots, m. \tag{3.10}$$

В качестве приближенных решений уравнения (2.1) принимаются $u_r = u_{m,\alpha}$ и $\bar{u}_r = \bar{u}_{m,\alpha}$ $(r = \alpha^{-1})$. Как известно из гл. II, эти значения представимы в виде (2.8), (2.9) с функцией

$$g_r(\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\alpha^j}{(\alpha + \lambda)^{j+1}} = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \frac{1}{(1 + r\lambda)^m}\right], \quad r = \alpha^{-1},$$

для которой условия (2.5) — (2.7) выполнены с $p = m$, $\gamma = m$, $\gamma_m = 1$; в (2.10) $\bar{\gamma}_m = 2$. Приближения (2.37) имеют вид

$$B_{r\eta} = B_{\alpha\eta}^{(m)} = \sum_{j=2}^{m-1} \alpha^j (\alpha I + A_\eta^* A_\eta)^{-(j+1)} A_\eta^*,$$

$$\bar{B}_{r\eta} = \bar{B}_{\alpha\eta}^{(m)} = B_{\alpha\eta}^{(m)} A_\eta B_{\alpha\eta}^{(m)}.$$

Применимы теоремы 2.2 — 2.6. Ограничимся указанием оценок при априорном выборе α.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия (2.2) — (2.4). Тогда при

$$\varepsilon_2^{-1} m \mu_\eta \eta \leqslant \alpha \leqslant \varepsilon_1^{1/m} \mu_\eta^{2 - \frac{1}{m}} \eta^{1/m}, \quad \varepsilon_1 > 0, \ 0 < \varepsilon_2 \leqslant 1$$

для $u_r = u_{m,\alpha}$ и $B_{r\eta} = B_{\alpha\eta}^{(m)}$ справедливы оценки (2.26) и (2.40), а при

$$\varepsilon_2^{-1} m\mu_\eta \eta \leqslant \alpha \leqslant (\varepsilon_1/2)^{1/m} \mu_\eta^{2-1/m} \eta^{1/m}, \quad \varepsilon_1 > 0,\, 0 < \varepsilon_2 \leqslant 1$$

для $\bar{u}_r = \bar{u}_{m,\alpha}$ и $\bar{B}_{r\eta} = \bar{B}_{\alpha\eta}^{(m)}$ справедливы оценки (2.28) и (2.39).

Судя по этим оценкам, итерированный вариант метода А. Н. Тихонова несколько точнее неитерированного. Более существенным является то обстоятельство, что параметр $\alpha \asymp \eta^{1/m}$ не надо брать столь малым, как в неитерированном варианте $(\alpha \asymp \eta)$. Это позволяет увеличить устойчивость вычислений.

3.3. **Итерационные методы.** Пусть $g : [o, a] \to R$ — непрерывная функция, такая, что $a \geqslant \|A_\eta\|^2$ $(0 < \eta < \mu/2)$ и

$$0 < g(\lambda) < 2/\lambda \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant a). \tag{3.11}$$

Тогда

$$\theta(s) \equiv \max_{s \leqslant \lambda \leqslant a} |1 - \lambda g(\lambda)| < 1 \qquad \forall s \in (0, a). \tag{3.12}$$

Обозначим еще

$$\gamma = \max_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} g(\lambda). \tag{3.13}$$

Введем оператор

$$B_\eta = g(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* \tag{3.14}$$

и построим итерации

$$u_0 = 0, \quad u_n = u_{n-1} - B_\eta (A_\eta u_{n-1} - f_\delta), \quad n = 1, \ldots, r, \tag{3.15}$$

$$\bar{u}_0 = 0, \quad \bar{u}_n = \bar{u}_{n-1} - B_\eta (A_\eta \bar{u}_{n-1} - A_\eta u_r), \quad n = 1, \ldots, r. \tag{3.16}$$

Число итераций r примем за параметр регуляризации. Для номеров вида $n = 2^k$ итерации (3.15) и (3.16) можно легко вычислить по схеме Шульца — Хотеллинга (см. гл. II, п. 4.4)

$$C_{0\eta} = g(A_\eta^* A_\eta), \quad C_{k\eta} = C_{k-1,\eta}(2I - A_\eta^* A_\eta C_{k-1,\eta}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.17}$$

$$u_n = C_{k\eta} A_\eta^* f_\delta, \quad \bar{u}_n = C_{k\eta} A_\eta^* A_\eta C_{k\eta} A_\eta^* f_\delta, n = 2^k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.18}$$

При этом операторы

$$B_{k\eta} = C_{k\eta} A_\eta^*, \qquad \bar{B}_{k\eta} = B_{k\eta} A_\eta B_{k\eta} \tag{3.19}$$

можно трактовать как аппроксимации к A^+.

Наиболее распространенные итерационные методы соответствуют функциям

$$g(\lambda) = \gamma = \mathrm{const}, \qquad 0 < \gamma < 2/a,$$

и

$$g(\lambda) = (\alpha + \lambda)^{-1}, \qquad \alpha = \mathrm{const} > 0,$$

— это явная и неявная итерационные схемы, неоднократно обсуждавшиеся в предыдущих главах. Для этих схем соответственно

$$\theta(s)=\max\{|1-\gamma s|, |1-\gamma a|\}$$

и

$$\theta(s)=\alpha(\alpha+s)^{-1}.$$

По лемме 4.1 гл. II итерационные методы (3.15) и (3.16) принадлежат классу методов (2.8) и (2.9), для которых условия (2.5) — (2.7) выполнены с любым $p>0$. Поэтому мы смогли бы сразу дать переформулировку теорем 2.2 — 2.6 для итерационных методов. Однако специфика методов позволяет уточнить нижнюю границу тех r, при которых справедливы указанные в теоремах 2.2 — 2.4 оценки.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия (2.2) — (2.4) и (3.11). Если r четно и (см. обозначения (3.12) и (3.13))

$$\ln(\varepsilon_1\mu_\eta^{-1}\eta)/\ln\theta(\mu_\eta^2)\leqslant r\leqslant\varepsilon_2(\delta\mu_\eta\eta)^{-1},\qquad \varepsilon_1>0,\ 0<\varepsilon_2\leqslant 1,\qquad(3.20)$$

то при $f\in\mathscr{R}(A)$ для итерационного приближения u_r справедлива оценка (2.26). Если r четно, $f\in F$ и

$$\ln(\varepsilon_1\mu_\eta^{-1}\eta/2)/\ln\theta(\mu_\eta^2)\leqslant r\leqslant\varepsilon_2(\gamma\mu_\eta\eta)^{-1},\qquad \varepsilon_1>0,\ 0<\varepsilon_2\leqslant 1,\qquad(3.21)$$

то для итерационного приближения $\bar{u}_r$ справедлива оценка (2.28). Если k таково, что для $r=2^k$ выполнено (3.20), то для $B_{k\eta}$ справедливы оценки (2.40); если k таково, что для $r=2^k$ выполнено (3.21), то для $\bar{B}_{k\eta}$ справедлива оценка (2.39).

На нечетные r утверждения о справедливости оценок (2.26) и (2.28) распространяются при условии, что вместо (3.11) выполнено неравенство

$$0<g(\lambda)\leqslant 1/\lambda\quad(0\leqslant\lambda\leqslant a).\qquad(3.22)$$

Доказательство. Методы (3.15), (3.16) и (3.17), (3.19), как уже отмечалось, укладываются в рамки методов (2.8), (2.9) и (2.37) с функцией

$$g_r(\lambda)=\sum_{j=0}^{r-1}(1-\lambda g(\lambda))^j g(\lambda)=\frac{1}{\lambda}[1-(1-\lambda g(\lambda))^r],$$
$$r=1,2,3,\ldots.$$

Условие (2.5) для $g_r(\lambda)$ выполнено с постоянной γ, определенной в (3.13); условие (2.6) тоже выполнено при всех $p>0$ (см. лемму 4.1 гл. II), но ниже это не используется. Из равенства

$$1-\lambda g_r(\lambda)=(1-\lambda g(\lambda))^r,\quad r=1,2,3,\ldots$$

видим, что при четных r выполнено и условие (2.7); при нечетных r оно выполнено при усиленном условии (3.22). Отсюда же видим, что

$$\max_{s\leqslant\lambda\leqslant a}|1-\lambda g_r(\lambda)|=[\theta(s)]^r.\qquad(3.23)$$

Из равенства

$$1-\lambda\bar{g}_r(\lambda)=1-\lambda^2g_r^2(\lambda)=2(1-\lambda g(\lambda))^r-(1-\lambda g(\lambda))^{2r}$$

с учетом возрастания функции $2x-x^2$ на $[0,1]$ получаем также, что

$$\max_{s\leqslant\lambda\leqslant a}|1-\lambda\bar{g}_r(\lambda)|=2[\theta(s)]^r-[\theta(s)]^{2r}\leqslant 2[\theta(s)]^r. \qquad (3.24)$$

Используя (3.23) и (3.24), оценим в (2.29) заново

$$\|P_\eta v_r\|\leqslant\{[\theta(\mu_\eta^2)]^r+\mu_\eta^{-1}\eta\}\|u_*\|,$$
$$\|P_\eta\bar{v}_r\|\leqslant\{2[\theta(\mu_\eta^2)]^r+\mu_\eta^{-1}\eta\}\|u_*\|;$$

заметим, что нижнее ограничение на r в (3.20) подобрано из условия $[\theta(\mu_\eta{}^2)]^r\leqslant\varepsilon_1\mu_\eta{}^{-1}\eta$. Нормы $\|(I-P_\eta)v_r\|$ и $\|(I-P_\eta)\bar{v}_r\|$ оцениваем по-прежнему. В результате при r, указанных в (3.20) и (3.21), для v_r и $\bar{v}_r$ снова получаем оценки (2.32) и (2.33). Не изменятся и другие детали доказательства теоремы 2.2, и мы приходим к оценкам (2.26) и (2.28). Оценки (2.39), как уже отмечалось, являются непосредственным следствием из оценки (2.28). Наконец, при доказательстве оценок (2.40) заметим, что в данном случае

$$\|P_\eta K_{r\eta}P\|\leqslant[\theta(\mu_\eta^2)]^r\leqslant\varepsilon_1(\mu-\eta)^{-1}\eta;$$

другие детали доказательства теоремы 2.4 не изменятся. Теорема 3.3 доказана.

В соответствии с (3.20) и (3.21) минимальное количество итераций (3.15) или (3.16), достаточное для достижения точности (2.26) или (2.28), имеет порядок $r\asymp|\ln(\varepsilon_1\eta)|$; минимальное количество операторных итераций (3.17), достаточное для достижения точности (2.39) и (2.40), имеет порядок $k\asymp\log_2|\ln(\varepsilon_1\eta)|$.

Нетрудно переформулировать на случай итерационных методов (3.15) и (3.16) и теоремы 2.5 и 2.6 об апостериорном выборе момента останова r. Величины ε_η, ε_η' и ε_η'' в оценках (2.43) и (2.49) будут иметь порядок $\varepsilon_\eta\asymp\eta|\ln\eta|$, $\varepsilon_\eta'\asymp\eta^2(\ln\eta)^2$, $\varepsilon_\eta''\asymp\eta^3(\ln\eta)^2$.

Результаты без труда распространяются и на непрерывный аналог итерационных методов и прочие конкретные методы, рассмотренные в гл. II.

3.4. **Случай неограниченного оператора.** Результаты данной главы остаются в силе и в случае неограниченных замкнутых плотно определенных операторов $A, A_\eta: H\to F$, таких, что оператор $A_\eta-A$ ограничен и подчинен условию (2.4); условия (2.5)—(2.7) и (3.11) считаются выполненными с $a=\infty$. Вместо (2.4) и ограниченности $A_\eta-A$ можно ввести более естественные для неограниченных операторов условия

$$\|A_\eta u-Au\|\leqslant\eta(\|u\|+\|Au\|),\qquad u\in\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(A_\eta)\subset H,$$
$$\|A_\eta^*z-A^*z\|\leqslant\eta(\|z\|+\|A^*z\|),\qquad z\in\mathcal{D}(A^*)=\mathcal{D}(A_\eta^*)\subset F,$$

но в таком случае структура констант в оценках погрешности несколько изменится.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

А. Н. Тихонов и М. М. Лаврентьев свои методы регуляризации предложили и в случае приближенно заданной правой части обосновали в [71, 50]. В. К. Иванов [41] предложил и обосновал метод квазирешений, который в простейшем случае равносилен методу А. Н. Тихонова со специальным выбором параметра регуляризации, обеспечивающим слабую сходимость приближений.

Наиболее полная литература имеется о методе А. Н. Тихонова. Особо выделим работы В. К. Иванова [42] и В. А. Морозова [56—59], положивших начало изучению принципа невязки для метода А. Н. Тихонова. Затем эта тематика изучалась в работах [8, 10, 34, 35]; отметим также недавние работы [3, 40, 73, 79]. Принцип невязки для метода А. Н. Тихонова к настоящему времени всесторонне изучен, рассмотрены задачи в банаховых пространствах, нелинейные задачи, различные модификации принципа. Следует отметить, что в литературе понятие «принцип невязки» трактуется неоднозначно.

Немало работ имеется и по методу итераций для некорректных задач. В [89, 77, 46, 68] он исследован в случае точных данных для линейной задачи, в [50] — в случае неточных данных; принципу невязки останова итераций посвящены работы [8, 10, 39, 40, 18]. Перечисленные работы затрагивают явную итерационную схему. Неявная итерационная схема на уровне априорного задания числа итераций исследовалась в [56, 90, 49]. В [93] введена более общая итерационная формула (3.4) гл. II. Принцип невязки для такого класса итерационных методов подробно исследован в [19—22], частично в рамках более общего класса методов, описанных в разд. 3 гл. II. В частности, выяснилось, что итерационные методы с остановом по принципу невязки оптимальны по порядку на всех классах истокопредставимых решений $\mathcal{M}_{p\rho u_0}$, $p>0$, $\rho>0$. Некоторые свойства оптимальности для индивидуальной задачи при останове по невязке выявлены в [63].

В последнее время выполнен ряд интересных работ [84—86, 2, 32, 33, 75, 64, 65, 61, 27] по нестационарным и нелинейным итерационным методам, которые не вошли в рамки данной книги; в частности, обоснован принцип невязки для ряда таких методов. Итерационные методы для нелинейных задач исследованы в [15, 12, 4, 26] и ряде других работ; они тоже остались вне поля зрения данной книги.

Идея построения регуляризаторов некоректно поставленных задач как некоторых функций от оператора решаемого уравнения выдвинута в работах А. Б. Бакушинского [6—11] (см. также [81—83]). В [8, 10, 13, 16] изучен и принцип невязки, но выбор параметра осуществляется на завышенном уровне невязки, портящем оптимальный порядок метода.

Изложение гл. II—IV данной книги следует работам [20—22]. В этих работах, в частности, введены условия (3.1), (3.2) гл. II и выявлена ведущая роль квалификации метода при обосновании принципа невязки, а также выделен подкласс методов (см. п. 3.3 гл. II), позволяющий обосновать этот принцип на критическом уровне невязки. Утверждения типа леммы 4.1 и теоремы 4.2 гл. III для метода А. Н. Тихонова и явной итерационной схемы были ранее получены в работе И. В. Емелина, М. А. Красносельского [40]. Элементарная теорема 3.5 гл. I и ее приложения к анализу оптимальности методов регуляризации в ослабленных нормах приведены в [25]. С помощью теоремы 3.7 гл. I эти результаты без труда переносятся и на случай приближенно заданного оператора. Об оптимальном выборе параметра в методе А. Н. Тихонова см. работу Л. А. Агеева [1]. Другой оптимальный алгоритм построен в [67].

В работах [82, 83, 92] исследован класс методов в условиях точно заданных правой части и оператора. Более полный набор подобных результатов следует из теорем 5.1 и 5.2 гл. II.

Устойчивость метода итераций относительно малых детерминированных помех — содержание разд. 4 гл. IV — обсуждалась в [39, 40, 18]; операторная форма итераций проанализирована в [54].

Сходимость по вероятности для итерационных процедур со случайными ошибками в некорректных задачах исследовалась в работах [28—31, 88]. Эти результаты в переработанном виде излагаются в разд. 2 гл. V. Отметим близость методов разд. 3 гл. V к методам стохастической аппроксимации. В другой постановке регуляризующие свойства некоторых алгоритмов типа стохастической аппроксимации в некорректных задачах изучались в [14]. Идея метода статистического выбора параметра регуляризации, предлагаемого в разд. 4 гл. V, принадлежит М. А. Красносельскому.

Долго считалось, что некорректные нормально разрешимые задачи не допускают решения с точностью исходных данных $0(\delta+\eta)$. Лишь в 1982 г. С. Джумаев [37] и В. А. Морозов, С. Ф. Гилязов [60] показали, что для тихоновских приближений u_α и $\bar{u}_\alpha$ (см. обозначения разд. 3 гл. VI) справедливы оценки $\|u_\alpha - A^+f\| \leqslant c\,(\delta+\eta)$ для $f \in \mathscr{R}(A)$, $\|\bar{u}_\alpha - A^+f\| \leqslant c\,(\delta+\eta)$ для любого $f \in F$; структура постоянной c ими не исследовалась. Гл. VI представляет развернутое изложение заметок [23, 24], в которых подобные результаты получены для класса методов с акцентом на выяснение структуры постоянных. Отметим, что лемма 1.3 гл. VI была получена независимо в [23, 24] и [38]; мы предпочли изложить элегантное доказательство С. Джумаева и Э. Мухамадиева, основанное на их лемме 1.2 гл. VI.

Более подробную библиографию по различным аспектам теории и методов регуляризации некорректных задач можно найти в монографиях [26, 43, 51, 52, 70, 72, 73, 76] и в обзорах [58, 74, 53]. В частности, нами осталась незатронутой проблема вычисления значения неограниченного оператора на возмущенном элементе. Об этой проблеме см. [43]; в [69] проведено сравнение априорного и апостериорного выборов параметра регуляризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агеев А. Л.* К вопросу о построении оптимального метода решения линейного уравнения I рода.— Изв. вузов. Математика, 1983, № 3, с. 67—68.
2. *Алифанов О. М., Румянцев С. В.* Об устойчивости итерационных методов решения линейных некорректных задач.— Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 6, с. 1289—1291.
3. *Альбер Я. И., Рязанцева И. П.* Принцип невязки в нелинейных задачах с монотонными разрывными отображениями — регуляризующие алгоритмы.— Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 5, с. 1017—1020.
4. *Альбер Я. И., Рязанцева И. П.* Вариационные неравенства с разрывными монотонными отображениями.— Докл. АН СССР, 1982, т. 262, № 6, с. 1289—1293.
5. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 543 с.
6. *Бакушинский А. Б.* Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1967, т. 7, № 3, с. 672—677.
7. *Бакушинский А. Б.* Избранные вопросы приближенного решения некорректных задач: (Тексты лекций). М.: Изд-во МГУ, 1968. 90 с.
8. *Бакушинский А. Б.* К распространению принципа невязки.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1970, т. 10, № 1, с. 210—213.
9. *Бакушинский А. Б.* Замечания об одном классе регуляризующих алгоритмов.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1973, т. 13, № 6, с. 1596—1598.
10. *Бакушинский А. Б.* К обоснованию принципа невязки.— В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1973, с. 117—126.
11. *Бакушинский А. Б.* Оптимальные и квазиоптимальные методы решения линейных задач, порожденные регуляризующими алгоритмами.— Изв. вузов. Математика, 1978, № 11, с. 6—10.
12. *Бакушинский А. Б.* К принципу итеративной регуляризации.—Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1979, т. 19, № 4, с. 1040—1043.
13. *Бакушинский А. Б.* Принцип невязки в случае возмущенного оператора для общих регуляризующих алгоритмов.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1982, т. 22, № 4, с. 899—903.
14. *Бакушинский А. Б., Апарцин А. С.* Методы типа стохастической аппроксимации для решения линейных некорректных задач.— Сиб. мат. журн., 1975, т. 16, № 1, с. 12—18.
15. *Бакушинский А. Б., Поляк Б. Т.* О решении вариационных неравенств.— Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 5, с. 1038—1041.
16. *Бакушинский А. Б., Сизиков В. С.* Некоторые нестандартные регуляризующие алгоритмы и их численная регуляризация.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1982, т. 22, № 3, с. 532—539.
17. *Вайникко Г.* Анализ дискретизационных методов. Тарту: Тарт. ун-т, 1976. 162 с.
18. *Вайникко Г. М.* Оценки погрешности метода последовательных приближений для некорректных задач.— АиТ, 1980, № 3, с. 84—92.
19. *Вайникко Г. М.* Принцип невязки для класса итерационных методов.— В кн.: Методы решения некорректных задач и их приложения. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982, с. 19—28.
20. *Вайникко Г. М.* Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту: Тарт. ун-т, 1982, 110 с.

21. *Вайникко Г. М.* Принцип невязки для одного класса регуляризационных методов.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1982, т. 22, № 3, с. 499—515.
22. *Вайникко Г. М.* Критический уровень невязки в методах регуляризации.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1983, т. 23, № 6, с. 1283—1297.
23. *Вайникко Г. М.* Об оптимальной регуляризации нормально разрешимых задач.— В кн.: Теория и методы решения некорректно поставленных задач и их приложения. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983, с. 23—29.
24. *Вайникко Г. М.* Аппроксимация псевдообратного оператора.— В кн.: Методы решения нелинейных уравнений и задач оптимизации. Таллин: Валгус, 1984, с. 11—14.
25. *Вайникко Г. М.* Об одном классе методов регуляризации при наличии априорной информации о решении.— Учен. зап. Тарт. ун-та, 1984, вып. 672, с. 3—8.
26. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
27. *Васин В. В.* Проекционно-итерационные методы регуляризации линейных некорректных задач.— Методы решения некорректных задач и их приложения. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982, с. 38—46.
28. *Веретенников А. Ю.* О методе задачи Коши в некорректных задачах при случайных помехах.— Учен. зап. Тарт. ун-та, 1984, вып. 672, с. 10—15.
29. *Веретенников А. Ю.* Об итерационных методах в некорректных задачах при случайных ошибках.— АиТ, 1984, № 12, с. 34—39.
30. *Веретенников А. Ю., Красносельский М. А.* Регуляризация некорректных задач остановом в условиях случайных ошибок.— В кн.: Численное решение краевых задач и интегральных уравнений. Тарту: Тарт. ун-т, 1981, с. 79—81.
31. *Веретенников А. Ю., Красносельский М. А.* Регуляризующие правила останова в условиях случайных ошибок.— Докл. АН СССР, 1983, № 3, с. 521—524.
32. *Гилязов С. Ф.* Об оценках скорости сходимости итерационных методов решения линейных операторных уравнений.— В кн.: Численный анализ на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1976, вып. 14, с. 97—101.
33. *Гилязов С. Ф.* Устойчивое решение линейных некорректных уравнений методом наискорейшего спуска.— В кн.: Методы и алгоритмы в численном анализе. М.: Изд-во МГУ, 1981 ,с. 50—65.
34. *Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г.* Обобщенный принцип невязки.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1973, т. 13, № 2, с. 294—302.
35. *Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г.* О применимости принципа невязки в случае нелинейных некорректных задач и о новом регуляризующем алгоритме их решения.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1975, т. 15, № 2, с. 290—297.
36. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
37. *Джумаев С.* О приближенном вычислении псевдорешения.— Докл. АН ТаджССР, 1982, т. 25, № 10, с. 584—587.
38. *Джумаев С., Мухамадиев Э.* Об оптимальном выборе параметра регуляризации для решения линейных систем с приближенными данными.— В кн.: Методы решения нелинейных уравнений и задач оптимизации. Таллин: Валгус, 1984, с. 26—29.
39. *Емелин И. В., Красносельский М. А.* Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач.— АиТ, 1978, № 12, с. 59—63.
40. *Емелин И. В., Красносельский М. А.* К теории некорректных задач.— Докл. АН СССР, 1979, т. 244, № 4, с. 805—808.
41. *Иванов В. К.* О линейных некорректных задачах.—Докл. АН СССР, 1962, т. 145, № 2, с. 270—272.
42. *Иванов В. К.* О приближенном решении операторных уравнений первого рода.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1966, т. 6, № 6, с. 1089—1094.
43. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач. М.: Наука, 1978. 206 с.

44. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
45. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.
46. *Красносельский М. А.* О решении методом последовательных приближений уравнений с самосопряженными операторами.— Успехи мат. наук, 1961, т. 15, вып. 3, с. 161—165.
47. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П.* и др. Приближенное решение операторных уравнеиий. М.: Наука, 1969. 455 с.
48. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространстве суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 499 с.
49. *Крянев А. В.* Итерационный метод решения некорректных задач..— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1974, т. 14, № 1, с. 25—35.
50. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: СО АН СССР, 1962. 92 с.
51. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректиые задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
52. *Лисковец О. А.* Вариационные методы решения неустойчивых задач. Минск: Наука и техника, 1981. 343 с.
53. *Лисковец О. А.* Теория и методы решения некорректных задач.— В кн.: Математический анализ: (Итоги иауки и техиики). М.: ВИНИТИ, 1982, т. 20, с. 116—178.
54. *Минц А.* Об устойчивости операторных итераций относительно погрешности округления.— Учен. зап. Тарт. ун-та, 1984, вып. 672, с. 35—39.
55. *Менихес Л. Д.* О регуляризуемости отображений, обратных к интегральным операторам.— Докл. АН СССР, 1978, т. 241, № 2, с. 282—285.
56. *Морозов В. А.* О регуляризующих семействах операторов.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1967, вып. 8, с. 63—95.
57. *Морозов В. А.* О приицине невязки при решении операториых уравнений методом регуляризации.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1968, т. 8, № 2, с. 295—309.
58. *Морозов В. А.* Линейиые и нелинейные некорректные задачи.— В кн.: Математический анализ: (Итоги иауки и техники). М.: ВИНИТИ, 1973, т. 11, с. 129—178.
59. *Морозов В. А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Изд-во МГУ, 1974, 359 с.
60. *Морозов В. А., Гилязов С. Ф.* Оптимальная регуляризация иекорректных нормально разрешимых операторных уравнеиий.— В ки.: Методы и алгоритмы в численном анализе. М.: Изд-во МГУ, 1982, с. 11—18.
61. *Морозов В. А., Гилязов С. Ф.* Регуляризация условно-корректных операториых уравнений методом сопряженных градиеитов.— В кн.: Методы и алгоритмы в числеииом аиализе. М.: Изд-во МГУ, 1982, с. 19—28.
62. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения. Киев: Вища шк., 1980. 216 с.
63. *Раус Т.* О принципе невязки при решении некорректных задач.— Учен. зап. Тарт. ун-та, 1984, вып. 672, с. 16—26.
64. *Сарв Л.* Одно семейство нелинейных итерационных методов для решения иекорректных задач.— Изв. АН ЭССР. Физика. Математика, 1982, т. 34, № 3, с. 261—269.
65. *Сарв Л.* Двухшаговые α-процессы и их примеиение для решения иекорректных задач.— Учен. зап. Тарт. ун-та, 1983, вып. 633, с. 41—49.
66. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975. 232 с.
67. *Страхов В. Н.* О решении лииенйых некорректных задач в гильбертовом пространстве.— Дифференц. уравнения, 1970, т. 6, № 8, с. 1490—1495.
68. *Страхов В. Н.* К вопросу о скорости сходимости в методе простой итерации.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1973, т. 13, № 6, с. 1602—1606.
69. *Страхов В. Н.* О выборе константы в правиле А. Н. Тихонова задания параметра регуляризации при решении линейных условно-корректных за-

дач.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1981, т. 21, № 3, с. 1315.
70. *Танана В. П.* Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981. 157 с.
71. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач.— Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 1, с. 49—52.
72. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. 2-е изд. М.: Наука, 1979. 285 с.
73. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Регуляризующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 198 с.
74. *Тихонов А. Н., Морозов В. А.* Методы регуляризации некорректно поставленных задач.— В кн.: Вычисл. методы и программирование. Изд-во МГУ, 1981, вып. 35, с. 3—34.
75. *Трушников В. Н.* Один нелинейный регуляризационный алгоритм и некоторые его применения.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1979, т. 19, № 4, с. 823—829.
76. *Федотов А. М.* Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск: Наука, 1982. 189 с.
77. *Фридман В. М.* Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма I рода.— Успехи мат. наук, 1956, т. 11, вып. 1, с. 233—234.
78. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980. 576 с.
79. *Ягола А. Г.* О выборе параметра регуляризации при решении некорректных задач в рефлексивных пространствах.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1980, т. 20, № 3, с. 586—596.
80. *Balakrishnan V.* Fractional powers of closed operators and the semi-groups generated by them.— Pacific J. Math., 1960, vol. 10, p. 419—437.
81. *Engl H. W.* Necessary and sufficient conditions for convergence of regularization methods for solving linear operator equations of the first kind.— Num. Funct. Anal. and Optimization, 1981, vol. 3, N 2, p. 201—222.
82. *Groetsch C. W.* On the rate of convergence for approximations to the generalized inverse.— Numer. Funct. Anal. and Ojtimization, 1979, vol. 1, N 2, p. 195—201.
83. *Groetsch C. W.* The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind.— In: Research Notes in Math. Boston etc.: Pitman, 1984, vol. 105. 104 p.
84. *Kammerer W. J., Nashed M. Z.* Steepest descent for singular linear operators with nonclosed range.— Applicable Analysis, 1971, N 1, p. 143—159.
85. *Kammerer W. J., Nashed M. Z.* On the convergence of the conjugate gradient method for singular linear operator equations.— SIAM J. Numer. Anal., 1972, vol. 9, N 1, p. 165—181.
86. *Kammerer W. J., Nashed M. Z.* Iterative methods for best approximate solution of linear integral equations of the first and second kinds.— J. Math. Anal. and Appl., 1972, vol. 40, N 3, p. 547—573.
87. *Kato T.* Continuity of the map $S \to |S|$ for linear operators.— Proc. Jap. Acad., 1973, vol. 49, N 3, p. 157—160.
88. *Krasnoselskii M. A., Emelin I. V., Veretennikov A. Ju.* On regularization of ill-pozed problems by stop-rules of iterative procedures with random errors.— Numer. Funct. Anal. and Optimization, 1982, vol. 5, N 2, p. 199.
89. *Landweber L.* An. iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind.— Amer. J. Math., 1951, vol. 73, p. 615—624.
90. *Martinet B.* Determination approchée d'un point fixe d'une application pseudo-contractante. Cas de l'application prox.— C. R. Acad. Sci., 1972, vol. 174. N 2, p. 163—165.
91. *Melkmann A. A., Micchelli C. A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data.— SIAM J. Numer. Anal., 1979, vol. 16, N 1, p. 87—105.
92. *Poljak B. T.* Iterative algorithms for singular minimization problems.—Nonlinear Programming, 1981, N 4, p. 147—166.
93. *Strand O. W.* Theory and methods related to the singular function expansion and Landweber's iteration for integral equations of the first kind.— SIAM J. Numer. Anal., 1974, vol. 14, p. 798—825.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 5

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В УСЛОВИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК 125

Глава 6

НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ ЗАДАЧИ 152

Геннадий Михайлович ВАЙНИККО
Александр Юрьевич ВЕРЕТЕННИКОВ

**ИТЕРАЦИОННЫЕ
ПРОЦЕДУРЫ
В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ**

Утверждено к печати
ордена Ленина Институтом проблем
управления АН СССР

Редактор издательства
А. А. Боровая
Художник
Б. К. Шаповалов

Художественный редактор
Н. А. Фильчагина

Технический редактор
Л. И. Куприянова

Корректор
Р. З. Землянская

ИБ № 31438

Сдано в набор 06.12.85
Подписано к печати 14.03.86
Т-00074. Формат $60\times90^1/_{16}$
Бумага кн.-журнальная
Гарнитура литературная
Печать высокая
Усл. печ. л. 11,5. Усл. кр. отт. 11,63. Уч.-изд. л.
Тираж 2850 экз. Тип. зак. 4706. Цена 1 р. 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва В-485,
Профсоюзная ул., 90.

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6.

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ
«НАУКА»
ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ КНИГИ:

Бримкулов У. Н., Круг Г. К., Саванов В. Л.

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ И ПРОЦЕССОВ

10 л. — 1 р. 50 к.

В книге рассматриваются вопросы планирования и анализа экспериментов, когда объектами исследования являются случайные поля и процессы. Такими объектами могут быть, например, пространственно-временные случайные океанографические, метеорологические, радиотехнические поля и другие стохастические объекты. Излагаются методы оценивания характеристик случайных полей и процессов, оптимального планирования экспериментов и численные процедуры построения оптимальных планов.

Для специалистов, занимающихся планированием экспериментов и статистической обработкой данных.

КИБЕРНЕТИКА. МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЫ В ИГРАХ И ЗАДАЧАХ

10 л.

В сборнике рассказывается об играх и задачах, которые приобрели особый интерес в связи с вторжением в нашу жизнь микрокалькуляторов. Подбор задач обеспечивает последовательное изучение возможностей современных микрокалькуляторов. Статьи сборника — своеобразная школа программирования, дающая читателю «вторую грамотность», прививающая навыки, необходимые каждому, кто пользуется микрокалькулятором и готовится к работе с персональными ЭВМ.

Для широкого круга читателей, интересующихся развитием современной науки.