АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
СИБИРСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Ответственные редакторы
доктора физико-математических наук
Б. А. Бельтюков, В. П. Булатов

(Отдельный оттиск)

НОВОСИБИРСК
«НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1988

ортогональный самодуальный σ-полином

$$y_n\left(2\cos\frac{2x+1}{2N+3}\pi\tau\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{4^k}\prod_{j=0}^{k-1}\times$$

$$\times\frac{\left(\cos\frac{2n+1}{2N+3}\pi\tau-\cos\frac{2j+1}{2N+3}\pi\tau\right)\left(\cos\frac{2x+1}{2N+3}\pi\tau-\cos\frac{2j+1}{2N+3}\pi\tau\right)}{\sin^2\left(\frac{1+j}{2N+3}\pi\tau\right)\sin\left(\frac{N-j+\varepsilon}{2N+3}\pi\tau\right)\sin\left(\frac{N+j+2+\varepsilon}{2N+3}\pi\tau\right)} \quad (43)$$

удовлетворяет соотношению (38).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б.** Классические ортогональные полиномы дискретной переменной.— М.: Наука, 1985.— 215 с.
2. **Karlin S., Gregor J. L.** The Hahn polynomials, formulas and applications // Scripta Math.— 1961.— V. 26.
3. **Белов Б. И.** Явные полиномиальные решения рекуррентных уравнений гипергеометрического типа // Численные методы анализа и их приложения.— Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1987.
4. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1973.— Т. 1.
5. **Askey R., Wilson J.** A set os orthogonal polynomials that generalize the Racah coefficients or 6-j simbols // SIAM J. Math. Anal.— 1979.— V. 10, N 5, September.

Г. М. Вайникко, У. А. Хямарик

САМОРЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ПРОЕКЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

Для решения операторных уравнений на ЭВМ они дискретизируются, а в случае некорректных задач кроме того и регуляризируются, чаще всего методом А. Н. Тихонова. Оказывается, что при решении некоторых некорректных задач можно ограничиться только дискретизацией, минуя шаг регуляризации, поскольку дискретизация сама обладает регуляризирующими свойствами (в таком случае говорят о саморегуляризации задачи при ее дискретизации). Примером служат интегральные уравнения Вольтерра I рода, для которых подробно изучены методы квадратурных сумм (см. [1]).

Начало изучению проекционных методов в некорректных задачах положено в [2—4] (см. также обзор в [5]). Саморегуляризация при дискретизации задачи проекционными методами подробно проанализирована в [6], где приведена и соответствующая библиография. О саморегуляризации в других алгоритмах дискретизации некорректных задач см. [7—18].

Настоящая статья является дополнением к работе [6].

1. Рассмотрим задачу

$$Au = f, \ A \in \mathscr{L}(H, F), \tag{1}$$

где H и F — гильбертовы пространства. Считаем, что область значений $\mathscr{R}(A)$ не замкнута в F. Пусть вместо $f \in \mathscr{R}(A)$ известно приближение $f_\delta \in F$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$.

Для решения задачи (1) применим проекционный метод

$$u_n \in H_n, \ \langle Au_n - f_\delta, z_n \rangle = 0 \quad \forall z_n \in F_n. \tag{2}$$

Здесь $H_n \subset H$, $F_n \subset F$ — конечномерные подпространства; $\dim H_n = \dim F_n$; соответствующие ортопроекторы обозначим через P_n и Q_n. Условия (2) равносильны уравнению $Q_n A P_n u_n = Q_n f_\delta$, $u_n \in H_n$. Оказывается, что при изучении проекционных методов важную роль играют величины

$$\varkappa_n = \sup_{v_n \in H_n} \frac{\|v_n\|}{\|Av_n\|}; \quad \varkappa_n^* = \sup_{z_n \in F_n} \frac{\|z_n\|}{\|A^* z_n\|}.$$

2. Приведем теоремы сходимости, соответствующие доказательства можно найти в [6].

Теорема 1. *Пусть*

$$\|P_n v - v\| \to 0 \quad (\forall v \in H, \ n \to \infty), \tag{3}$$

$$\mathscr{N}(A^*) \cap F_n = 0 \quad (n \geqslant n_0),$$

$$\|P_n A^* z_n\| \geqslant \tau^* \|A^* z_n\| \quad (\forall z_n \in F_n, \ n \geqslant n_0), \ \tau^* = \text{const} > 0. \tag{4}$$

Тогда уравнение (1) *имеет единственное решение* $u_* \in H$, *проекционный метод* (2) *при* $n \geqslant n_0$ *определяет единственное приближение* $u_n \in H_n$. *Выбрав* $n = n(\delta)$ *так, что* $n(\delta) \to \infty$, $\delta \varkappa_{n(\delta)}^* \to 0$ *при* $\delta \to 0$, *имеем* $u_{n(\delta)} \to u_*$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3), (4) *и условия*

$$\mathscr{N}(A) \cap H_n = 0 \quad (n \geqslant n_0),$$

$$\|Q_n A v_n\| \geqslant \tau \|A v_n\| \quad (\forall v_n \in H_n, \ n \geqslant n_0), \ \tau = \text{const} > 0,$$

$$\varkappa_{n+1} \left\| (I - Q_n') A \right\| \leqslant \gamma = \text{const} \ (n \geqslant n_0),$$

где Q_n' — *ортопроектор в* F *на* AH_n. *Тогда уравнение* (1) *имеет единственное решение* $u_* \in H$, *а уравнение* (2) *при* $n \geqslant n_0$ — *единственное решение* $u_n \in H_n$. *Если за* $n = n(\delta)$ *выбрать первое из чисел* $n = 1, 2, \ldots$, *при котором уравнение* (2) *разрешимо и*

$$\|Au_n - f_\delta\| \leqslant b\delta, \quad b = \text{const} > \tau^{-1},$$

то $u_{n(\delta)} \to u_*$ *при* $\delta \to 0$.

Рассматривая конкретные проекционные методы, допускаем, что в уравнении (1) неточно задана не только правая часть f, а также оператор: вместо оператора $A \in \mathscr{L}(H, F)$ в нашем распоряжении лишь приближение $A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$.

Теорема 3. *Пусть* $\mathscr{N}(A) = 0$, *выполнено условие* (3), *и пусть при некотором натуральном* m

$$(\varkappa_n + \varkappa_{n+1})^{1/m} \|(I - P_n)(A^*A)^{1/(2m)}\| \leqslant \text{const} \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Тогда метод наименьших квадратов

$$u_n \in H_n, \ \langle A_\eta u_n - f_\delta, A_\eta v_n \rangle = 0 \quad (\forall v_n \in H_n)$$

при $\eta \varkappa_n < 1$ *определяет единственное приближение* u_n. *Если* $n = n(\delta, \eta)$ *выбрать так, что*

$$n(\delta, \eta) \to \infty, \ (\delta + \eta) \varkappa_{n(\delta, \eta)} \to 0 \ \text{при} \ \delta, \eta \to 0, \tag{6}$$

то и $_{n(\delta,\eta)} \to u_*$ *при* δ, $\eta \to 0$. *При достаточно малых* δ, η *выбор* $n = n(\delta, \eta)$ *осуществим по правилу*: $n = n(\delta, \eta)$ — *первое из чисел* $n = 1, 2, \ldots$, *для которого*

$$\|A_\eta u_n - f_\delta\| \leqslant b(\delta + \|u_n\| \eta), \quad b = \text{const} > 1; \tag{7}$$

при таком выборе $u_{n(\delta,\eta)} \to u_*$ *при* $\delta, \eta \to 0$.

Теорема 4. *Пусть* $H = F$, $A = A^* > 0$, $A_\eta = A_\eta^* > 0$ *и выполнено условие* (3). *Пусть при некотором натуральном* m

$$\varkappa_n^{1/m} \left\| (I - P_n) A^{1/m} \right\| \leqslant \gamma, \quad \varkappa_{n+1}^{1/m} \left\| (I - P_n) A^{1/m} \right\| \leqslant \text{const} \quad (n \geqslant 1).$$

Тогда метод Галеркина

$$u_n \in H_n, \ \langle A_\eta u_n - f_\delta, v_n \rangle = 0 \quad (\forall v_n \in H_n)$$

при $\eta \varkappa_n < (1 + \gamma^2)^{-m/2}$ *определяет единственное приближение* u_n. *Если* $n = n(\delta, \eta)$ *выбрать по условиям* (6), *то* $u_{n(\delta,\eta)} \to u_*$ *при* δ, $\eta \to 0$. *При достаточно малых* δ, η *выбор* $n = n(\delta, \eta)$ *осуществим по правилу*: $n = n(\delta, \eta)$ — *первое из чисел* $n = 1, 2, \ldots$, *для которого выполнено* (7), *где* b — *достаточно большая постоянная; при таком выборе* $u_{n(\delta,\eta)} \to u_*$ при δ, $\eta \to 0$.

Теорема 5. *Пусть* $\mathscr{N}(A) = 0$, $\mathscr{N}(A^*) = 0$ и $\|z - Q_n z\| \to 0$ *при* $n \to \infty$ $(\forall z \in F)$. *Тогда метод наименьшей ошибки*

$$u_n \in A_\eta^* F_n, \quad \langle A_\eta u_n - f_\delta, z_n \rangle = 0 \qquad (\forall z_n \in F_n)$$

при $\eta \varkappa_n^* < 1$ *определяет единственное приближение* u_n. *Если* $n = n(\delta, \eta)$ *выбрать так, что* $n(\delta, \eta) \to \infty$, $(\delta + \eta) \varkappa_{n(\delta,\eta)}^* \to 0$ *при* δ, $\eta \to 0$, *то* $u_{n(\delta,\eta)} \to u_*$ *при* δ, $\eta \to 0$. *Если при некотором натуральном* m *выполнено условие*

$$(\varkappa_n^* + \varkappa_{n+1}^*)^{1/m} \left\| (I - Q_n)(AA^*)^{1/(2m)} \right\| \leqslant \text{const} \quad (n \geqslant 1),$$

а δ, η *достаточно малы, то выбор* $n = n(\delta, \eta)$ *осуществим по правилу*: $n = n(\delta, \eta)$ — *первое из чисел* $n = 1, 2, \ldots$, *для которого выполнено* (7), *где* b — *достаточно большая постоянная; при таком выборе* $u_{n(\delta,\eta)} \to u_*$ *при* $\delta, \eta \to 0$.

В [6] указан класс интегральных уравнений I рода, для которых условия теорем 3—5 выполняются, если в качестве проекционных пространств использовать пространства сплайнов.

3. В дополнение к теоремам разд. 2 приведем три замечания.

Замечание 1. Спроектированные уравнения (2) равносильны системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), определенным выбором базисов H_n и F_n. Если в методах наименьших квадратов или Галеркина выбирать базис H_n с ограниченным при $n\to\infty$ числом обусловленности матрицы Грама, то числа обусловленности соответствующих матриц СЛАУ возрастают при $n\to\infty$, $\eta\varkappa_n^*\leqslant c<1$ не быстрее, чем $\varkappa_n^2$ и $\varkappa_n$ соответственно. Если в методе наименьшей ошибки выбирать базис F_n с ограниченным при $n\to\infty$ числом обусловленности матрицы Грама, то число обусловленности матрицы СЛАУ возрастает при $n\to\infty$, $\eta\varkappa_n^*\leqslant c<1$ не быстрее, чем $(\varkappa_n^*)^2$. Это показано в [19].

Замечание 2. Рассмотрим случай, когда вместо условия $f\in\mathscr{R}(A)$ выполнено более слабое требование $Qf\in\mathscr{R}(A)$, где Q — ортопроектор в F на $\overline{\mathscr{R}(A)}$. Тогда уравнение $Au=f$ имеет решение в смысле наименьших квадратов, т. е. разрешима экстремальная задача $\|Au-f\|^2\to\min$, $u\in H$. Если под элементом u_* понимать решение уравнения $Au=Qf$, то в случае $A_\eta=A$ теорема 3 остается в силе. Действительно, в методе наименьших квадратов условия (2) для уравнений $Au=f$ и $Au=Qf$ совпадают, поскольку $\langle Qf,\ Av_n\rangle=\langle f,\ Av_n\rangle$ $\forall v_n\in H_n$, а для уравнения $Au=Qf$ теорема 3 применима.

Замечание 3. Рассмотрим случай, когда для проектирования уравнения (1) используются подпространства H_n и F_m с размерностями n и m, где $n<m$. Тогда спроектированное уравнение $Q_mA_\eta u_n=Q_mf_\delta$, $u_n\in H_n$, не имеет решения в общем случае. Обозначим через $u_{n,m}$ решение его в смысле наименьших квадратов, т. е. $u_{n,m}$ — решение уравнения

$$Q_mA_\eta P_nu_{n,m}=\Pi_{m,n}f_\delta,\quad u_{n,m}\in H_n,\tag{8}$$

где $\Pi_{m,n}$ — ортопроектор в F на образ оператора $Q_mA_\eta P_n$.

Эквивалентным уравнению (8) является симметризованное уравнение

$$P_nA_\eta^*Q_mA_\eta P_nu_{n,m}=P_nA_\eta^*Q_mf_\delta,\quad u_{n,m}\in H_n.\tag{9}$$

Пусть подпространства F_m выбираются так, что $\|Q_mA-A\|\leqslant c\eta$, $c=\mathrm{const}$. Уравнение (8) можно трактовать как спроектированное уравнение в методе наименьших квадратов с возмущенным оператором Q_mA_η. Погрешность этого оператора можно оценить так:

$$\|Q_mA_\eta-A\|\leqslant\|Q_m(A_\eta-A)\|+\|Q_mA-A\|\leqslant\eta+c\eta=(c+1)\eta.$$

Поэтому из теоремы 3 вытекает следующая

Теорема 6. *Пусть $\mathscr{N}(A)=0$, выполнены условия* (3), (5). *и пусть* $(c+1)\eta\varkappa_n<1$. *Тогда уравнение* (9) *имеет единственное решение $u_n=u_{n,m}$. Для приближения u_n справедливы утверждения теоремы* 3.

Для практического решения уравнения (9) выбираются базисы $\{\varphi_1,\ \dots,\ \varphi_n\}$ и $\{\psi_1,\ \dots,\ \psi_m\}$ подпространств H_n и F_m соответственно. Тогда вектор коэффициентов $x=(x_1,\ \dots,\ x_n)$ приближенного реше-

ния $u_{n,m}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\varphi_i$ находится из системы уравнений

$$G^T\underline{D}^{-1}\underline{G}x=G^T\underline{D}^{-1}\underline{f}_\delta,\quad \underline{G}=(A_\eta\varphi_j,\ \psi_i),\quad i=1,\ \dots,\ m,\quad j=1,\ \dots,\ n;$$

$$\underline{D}=(\psi_i,\ \psi_j),\quad i,\ j=1,\ \dots,\ m;\quad \underline{f}_\delta=((f_\delta,\ \psi_1),\ \dots,\ (f_\delta,\ \psi_m)).$$

4. Среди прочих проекционных методов особый интерес представляет метод наименьшей ошибки, так как саморегуляризация в нем достигается при весьма слабых ограничениях на решаемую задачу (см. теорему 5). Приведем комментарии к этому методу.

Название метода объясняется следующим. Пусть правая часть и оператор в уравнении (1) известны точно. Тогда элемент $u_n\in A^*F_n$, минимизирующий $\|u_n-u_*\|$, удовлетворяет условию $\langle u_n-u_*,\ A^*z_n\rangle=0$ $\forall z_n\in F_n$ или, что то же самое, условию $\langle Au_n-f,\ z_n\rangle=0$ $\forall z_n\in F_n$, т. е. уравнению в методе наименьшей ошибки. Получаемое в этом методе приближение характеризуется также свойством, что оно является решением с минимальной нормой для уравнения $Q_nAv=Q_nf$, $v\in H$. Действительно, нормальное решение v в последней задаче ортогонально $\mathscr{N}(Q_nA)$, поэтому $v\in\mathscr{R}(A^*Q_n)=A^*F_n$ и v удовлетворяет условиям $v\in A^*F_n$, $\langle Av-f,\ z_n\rangle=0$ $\forall z_n\in F_n$, т. е. уравнению метода наименьшей ошибки.

Заметим, что так как в методе наименьшей ошибки в случае точных данных имеем $u_n=P^nu_*$, то при $F_{n_1}\subseteq F_{n_2}\subseteq\ldots\subseteq F$ для соответствующих приближений имеем $\|u_{n_1}\|\leqslant\|u_{n_2}\|\leqslant\ldots\leqslant\|u_*\|$. Отметим еще, что, подобно тому, как метод наименьших квадратов для уравнения $Au=f$ совпадает с методом Галеркина для симметризованного уравнения $A^*Au=A^*f$ с прежними подпространствами H_n, метод наименьшей ошибки для уравнения $Au=f$ совпадает с методом Галеркина для двойственным образом симметризованного уравнения $AA^*v=f$ $(u=A^*v)$ с неизвестным $v\in F$ и проекционными пространствами F_n.

5. Остановимся на методах типа наименьшей ошибки для интегрального уравнения

$$(Au)(t)\equiv\int\limits_0^1\mathscr{K}(t,s)\,u(s)\,ds=f(t)\quad(0\leqslant t\leqslant1),\qquad F=L_2(0,1).\tag{10}$$

Пусть дана сетка $0\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_n\leqslant1$ (значения $f(t)$ могут быть известны только в точках $t_1,\ \dots,\ t_n$). В зависимости от выбора пространства H рассмотрим два варианта метода.

А. $H=L_2(0,1)$. Определим пространство $H_n=\mathrm{SPAN}\{\mathscr{K}(t_1,s),\ \dots,\ \mathscr{K}(t_n,s)\}$. Как и в методе наименьшей ошибки, разыскиваем элемент $u_n\in H_n$, минимизирующий $\|u_n-u_*\|_0\equiv\|u_n-u_*\|_{L_2(0,1)}$. Тогда $\langle u_n-u_*,\ \mathscr{K}(t_i,s)\rangle_0=0$ $(i=1,\ \dots,\ n)$. Учитывая, что $\langle u_*,\ \mathscr{K}(t_i,s)\rangle_0=\int\limits_0^1\mathscr{K}(t_i,s)\,u_*(s)\,ds=f(t_i)$, для определения коэффициентов c_j

в представлении $u_n = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathscr{K}(t_j, s)$ получили СЛАУ

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \mathscr{K}(t_j, s)\, \mathscr{K}(t_i, s)\, ds \cdot c_j = f_\delta(t_i) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Этот алгоритм с других позиций исследован в работах [7, 8]. Наша точка зрения на u_n, как минимизирующий норму $\|u_n - u_*\|_0$ элемент, полностью снимает проблему сходимости метода.

Пусть

$$\int_0^1 |\mathscr{K}(t, s)|^2\, ds \leqslant c = \mathrm{const} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1);$$

$$\int_0^1 |\mathscr{K}(t', s) - \mathscr{K}(t, s)|^2\, ds \to 0 \quad \text{при} \quad t' \to t \quad (0 \leqslant t, t' \leqslant 1).$$

Тогда для любого $u \in L_2(0, 1)$ имеем $\|P_n u - P_\infty u\|_0 \to 0$ при $h = \max\limits_i |t_{i+1} - t_i| \to 0$, где P_n и P_∞ — ортопроекторы в $L_2(0, 1)$, проектирующие соответственно на H_n и $L_2(0, 1) \ominus \mathscr{N}(A)$. Кроме того, $\mathscr{R}(A) \subset C[0, 1]$. Таким образом, в случае $f \in AL_2(0, 1)$ и точной правой части ($f_\delta = f$) приближение $u_n = P_n u_*$ сходится по L_2-норме к L_2-нормальному решению уравнения (10). Несложно указать условия согласования n с δ в случае неточной правой части ($\|f_\delta - f\|_c \leqslant \delta$).

Б. $H = H^m = W_2^m(0, 1)$, $m \geqslant 1$. Определим пространство

$$H_n = \mathrm{SPAN}\{G\mathscr{K}(t_1, s), \ldots, G\mathscr{K}(t_n, s)\},$$

где оператор G таков, что

$$\langle u, v\rangle_0 = \langle Gu, v\rangle_m; \quad \langle u, v\rangle_m = \int_0^1 [uv + u^{(m)} v^{(m)}]\, ds.$$

Нетрудно убедиться (см., например, [20]), что $G = L^{-1}$, где L — дифференциальный оператор $Lu = u + (-1)^m u^{(2m)}$ с областью определения

$$\mathscr{D}(L) = \{u/u \in H^{2m}[0, 1],\ u^{(k)}(0) = u^{(k)}(1) = 0,\ k = m, \ldots, 2m - 1\}.$$

Разыскивая $u_n \in H_n$, минимизирующий $\|u_n - u_*\|_m$, имеем

$$\langle u_n - u_*, G\mathscr{K}(t_i, s)\rangle_m = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Таким образом, коэффициенты c_j в представлении $u_n = \sum_{j=1}^{n} c_j G\mathscr{K}(t_j, s)$ определяются из СЛАУ

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \mathscr{K}(t_j, s)\, G\mathscr{K}(t_i, s)\, ds \cdot c_j = f_\delta(t_i) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Этот алгоритм рассмотрен в [9]. Вопрос о сходимости метода опять не представляет труда. Пусть

$$\int_0^1 |\mathscr{K}(t, s)|\, ds \leqslant c = \mathrm{const} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1);$$

$$\int_0^1 |\mathscr{K}(t', s) - \mathscr{K}(t, s)|\, ds \to 0 \quad \text{при} \quad t' \to t \quad (0 \leqslant t, t' \leqslant 1).$$

Тогда для любого $u \in H^m(0, 1)$ при $h \to 0$ имеем $\|P_n u - P_\infty u\|_{H^m(0,1)} \to 0$, где теперь P_n и P_∞ — ортопроекторы в $H_m(0, 1)$, проектирующие на H_n и $H^m(0, 1) \ominus \mathscr{N}(A)$ соответственно. В случае $f \in AH^m(0, 1)$ и точной правой части ($f_\delta = f$) приближение $u_n = P_n u_*$ сходится по H^m-норме к H^m-нормальному решению уравнения (10). Легко указать условия согласования n с δ, обеспечивающие сходимость метода в случае приближенной правой части.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Апарцин А. С., Бакушинский А. Б.** Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм // Дифференциальные и интегральные уравнения.— Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1972.— Вып. 1.
2. **Фридман В. М.** Новые методы решения линейного операторного уравнения // Докл. АН СССР.— 1959.— Т. 128, № 3.— С. 482—484.
3. **Petryshyn W. V.** Direct and interative methods for the solution of linear operator equations in Hilbert soace // Trans. Amer. Math. Soc.— 1962.— V. 105.
4. **Petryshin W. V.** On projectional-solvability and the Fredholm alternative for equations involving linear A-proper operators // Arch. Rational. Mech. Anal.— 1968.— V. 30.
5. **Лучка А. Ю., Лучка Т. Ф.** Возникновение и развитие прямых методов математической физики.— Киев: Наук. думка, 1985.
6. **Вайникко Г. М., Хямарик У. А.** Проекционные методы и саморегуляризация в некорректных задачах // Изв. вузов. Сер. мат.— 1985.— № 10.
7. **Nashed M. Z., Wahba G.** Convergence rates of approximate least squares solutions of linear integral and operator equations of the first kind // Math. Comput.— 1974.— V. 28, N 125.
8. **Engl H.** On least-squares collocation for solving linear integral equations of the first kind with noisy right-hand side // Bull. geol. e. sci. affini.— V. 41, N 3.
9. **Горбунов В. К.** Методы редукции неустойчивых вычислительных задач.— Фрунзе: Илим, 1984.
10. **Арсенин В. Я., Белоцерковский С. М., Лифанов И. К., Матвеев А. Ф.** Об одном способе регуляризации сингулярных интегральных уравнений первого рода // Дифференц. уравнения.— 1985.— Т. 21, № 3.
11. **Гребенников А. И.** Методы сплайн-коллокации и двойной сплайн-аппроксимации решения операторных уравнений и приложения к решению интегральных уравнений с особенностями // Методы и алгоритмы в численном анализе.— М.: Наука, 1984.
12. **Гребенников А. И.** Сплайн-коллокационный метод решения некоторых интегральных уравнений задач дифракции электромагнитных волн // Применение ЭВМ для решения задач математической физики.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.

13. **Гребенников А. И.** О регуляризирующих свойствах явных аппроксимирующих сплайнов // Методы мат. моделирования автоматиз. обраб. наблюдений и их применения.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
14. **Михайлова Н. Н.** Решение уравнения Абеля проекционно-сеточным методом // Вопросы реконструктивной томографии.— Новосибирск, 1985.
15. **Hsiao G. C., Kopp P., Wendland W. L.** Some applications of a Galerkin — collocation method for biundary integral equations of the first kind // Math. Meth. Appl. Sci.— 1984.— V. 6.
16. **Arnold D. N., Wendland W. L.** The convergence of spline collocation for strongly elliptic equations on curves // Numerische Mathematik.— 1985.— V. 47, N 3.
17. **Schmidt G.** On spline collocation methods for boundary integral equations in the place // Math. Meth. Appl. Sci.— 1985.— V. 7.
18. **Eggermont P. P. B.** Beyond superconvergence of collocation methods for Volterra integral equations of the first kind // Constructive methods for the practical treatment of integral equations/Ed. Hämmerlin G., Hoffmann K.— H.— Birkhäuser: Basel — Boston — Stuttgart, 1985.
19. **Хямарик У. А.** Проекционные методы для регуляризации линейных некорректных задач // Труды ВЦ СО АН СССР.— 1983.— № 50.
20. **Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.** Итерационные процедуры в некорректных задачах.— М.: Наука, 1986.

М. В. Булатов, В. Ф. Чистяков

ПРИМЕНЕНИЕ КОЛЛОКАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОДУ

Рассмотрим задачу

$$A(t)\dot{x}(t)=B(t)x(t)+f(t),\quad t\in I=[\alpha,\ \beta], \tag{1}$$

$$x(\alpha)=a, \tag{2}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — квадратные матрицы (возможно вырожденные $\forall t\in I$); $f(t)$ — известная, $x(t)$ — искомая n-мерные вектор-функции; $a\in R^n$. Будем предполагать, что элементы входных данных являются вещественно-аналитическими функциями, обозначим их $A(t)$, $B(t)$, $f(t)\in C^A(I)$.

Определение 1. *Система* (1) *имеет решение типа Коши на* I, *если при* $\forall f(t)\in C^A(I)$ *существуют гладкие на* I *вектор-функция* $\Psi(t)$ *и* $(n\times n)$-*матрица* $\Phi(t)$, $\operatorname{rank}\Phi(t)=d=\mathrm{const}$ *такие, что любая линейная комбинация* $\xi(t,\ c)=\Phi(t)c+\Psi(t)$, *где* $c\in R^n$, *является решением системы на* I *и на любом отрезке* $[\alpha_1,\ \beta_1]\subseteq I$ *нет решений, отличных от* $\xi(t,\ c)$.

При условии, что $A(t)$, $B(t)$, $f(t)\in C^A(I)$, это свойство эквивалентно определению регулярности, введенному в [1, с. 58]. Изменение было вызвано тем, что слова «регулярный» и «сингулярный» несут слишком большую нагрузку. Если система (1) регулярна, то из [2] известно, что тогда существуют неособенные $\forall t\in I$ мат-