UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

REGULARISIERUNG NICHTKORREKTER AUFGABEN

Gennadi Vainikko

Preprint No 200

FACHBEREICH MATHEMATIK

REGULARISIERUNG NICHTKORREKTER AUFGABEN

Gennadi Vainikko

Preprint No 200

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
Fachbereich Mathematik
Erwin–Schrödinger–Straße
D–6750 Kaiserslautern

Juni 1991

Das sind die Texte der Vorlesungen, die ich im Dezember 1988 - März 1989 an der Universität Kaiserslautern hielt.
Die Sektionen 1-4 enthalten Materialien, die in Russisch im Buch [33] und in früheren Arbeiten [27,28] [30-33] publiziert sind.
Sektion 5 enthält neue Ergebnisse, die wir während meines Aufenthaltes in Kaiserslautern in Zusammenarbeit mit Herrn Robert Plato (TU Berlin) ausarbeiteten (siehe [21,22]).
Sektion 6 ist eine Erweiterung der Arbeit [31].

Gennadi Vainikko

Kaiserslautern, 13.03.89

Inhalt

1. EINE KLASSE VON REGULARISIERUNGSVERFAHREN FÜR LINEARE NICHTKORREKTE AUFGABEN

1.1 Nichtkorrekte Aufgaben. Wir betrachten die Aufgabe

(1) $An = f$, $A : E \to F$, E,F-metrische Räume.

Der Korrentheitsbegriff für die Aufgabe (1) (siehe z.B. [5,8,26]) enthält:

1. die Existenz einer Lösung für jedes $f \in F$;
2. die Eindeutigkeit der Lösung;
3. die stetige Abhängigkeit der Lösung von Daten:

$$d_F(f_\delta, f) \to 0 \ (\delta \to 0) \Rightarrow d_E(A^{-1}f_\delta, A^{-1}f) \to 0 \ (\delta \to 0).$$

Ist eine oder mehrere der Bedingungen 1.-3. verletzt, heißt die Aufgabe (1) nichtkorrekt.

Eine parameterabhängige Abbildung $R_\delta : F \to E$ heißt Regularisator (oder Regularisierungsverfahren) für die nichtkorrekte Aufgabe (1), falls für jedes $f \in R(A) \subseteq F$

$$\sup_{\substack{f_\delta \in F \\ d_F(f_\delta, f) \le \delta}} \mathrm{dist}_E(R_\delta f_\delta, A^{-1}f) \to 0 \quad (\delta \to 0).$$

Hier bezeichnet $A^{-1}f$ die Menge aller Urbilder von f, d.h. die Menge aller Lösungen von (1).

Zuerst konstruiert man eine parameterabhängige Abbildung $K_r : F \to E$, so daß

$$\mathrm{dist}_E(K_r f, A^{-1}f) \to 0 \quad (r \to \infty) \quad \forall f \in R(A)$$

(das ist die Konvergenz bei exakten Daten) und dann setzt man

$$R_\delta = K_{r(\delta)} \text{ oder } R_\delta f_\delta = K_{r(\delta, f_\delta)}$$

mit einer geeeigneten Parameterauswahl $r = R(\delta)$ oder $r = r(\delta, f_\delta)$.

In dieser Sektion 1 konstruieren wir K_r für lineare Gleichungen in Hilberträumen. In den Sektionen 2-5 sind die Parameterauswahlen $r = r(\delta)$ und $r = r(\delta, f_\delta)$ untersucht.

1.2 Beispiele nichtkorrekter Aufgaben.

a) Integralgleichung erster Art:

$$(Au)(t) := \int_a^b K(t,s)u(s)ds = f(t) \quad (a \le t \le b), \ E = F = L_2(a,b).$$

Ist $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$, $\lambda_i(A) \ge 0$ $(i = 1,2,\dots)$, so ist $A = A^* \ge 0$.

b) Wärmeleitungsaufgabe mit umgekehrter Zeit:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right), \ x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \ 0 < t \le T,$$

$$u(x,t) = 0, \ x \in \partial\Omega, \ 0 \le t \le T,$$

$$u(x,T) = \psi(x), \ x \in \Omega \quad (\text{anstatt } u(x,o) = \varphi(x));$$

gesucht ist $u(x,o) =: \varphi(x)$, $x \in \Omega$.

Eine Umformulierung der Aufgabe:

$$A\varphi = \psi, \ E = F = L_2(\Omega).$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $a \in C(\bar{\Omega})$, $a(x) > 0$ $(x \in \bar{\Omega})$, dann hat der Operator A die Darstellung

$$A\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi, u_j) e^{-\lambda_j T} u_j \quad (\Rightarrow A = A^* > 0, \ \|A\| = e^{-\lambda_1 T} < 1)$$

wo λ_j $(0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots)$ und u_j $((u_i, u_j) = \delta_{ij})$ die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Eigenwertaufgabe

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \lambda u, \ x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \ x \in \partial\Omega$$

sind.

Beweis: Fourier-Zerlegung

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi, u_j) e^{-\lambda_j t} u_j$$

der Lösung der Wärmeleitungsaufgabe mit $u(x,o) = \varphi(x)$, $x \in \Omega$.

1.3 Eine Klasse von Regularisierungsverfahren (Fall $A^* = A \geq 0$)

Betrachten wir die Aufgabe

(1) $Au = f$, $A \in L(H,H)$, H-Hilbertraum
$A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq a$.

Es seien $g_r : [0,a] \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) Borel-meßbare Funktionen mit den Eigenschaften

(2) $\sup\limits_{0\leq\lambda\leq a} |g_r(\lambda)| \leq \gamma r$ $(r > 0)$, γ=const,

(3) $\sup\limits_{0\leq\lambda\leq a} \lambda^p |1-\lambda g_r(\lambda)| \leq \gamma_p r^{-p}$ $(r > 0,\ 0 \leq p \leq p_p)$,
γ_p=const.

Die Näherungslösung zur Gleichung (1) konstruieren wir mittels der Formel

(4) $u_r = (I-Ag_r(A))u_0 + g_r(A)f$.

Hier ist u_0 die Anfangsannäherung, z.B. $u_0 = 0$ (dann $u_r = g_r(A)f$).

Ist $A = {}_0\!\int^a \lambda dP(\lambda)$ die Spektralzerlegung von A, so definiert man $g_r(A) = {}_0\!\int^a g_r(\lambda)dP(\lambda)$. Im wichtigen Fall des kompakten Operators A mit

$$Au_i = \lambda_i u_i,\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq 0,\ (u_i,u_j) = \delta_{ij}\ (i,j = 1,2,\ldots)$$

haben wir

$$g_r(A)f = \sum_{i=1}^{\infty} (f,u_i)g_r(\lambda_i)u_i.$$

1.4 Erzeugung eines Regularisierungsverfahrens durch eine Funktion $g : [0,\infty] \to \mathbb{R}$. Voraussetzungen:

$$\gamma \equiv \sup_{0\leq x<\infty} |g(\lambda)| < \infty,$$

$$\gamma_p \equiv \sup_{0\leq\lambda<\infty} \lambda^p|1-\lambda g(\lambda)| < \infty \quad (0 \leq p \leq p_0).$$

Für $g_r(\lambda) := rg(r\lambda)$ sind dann (2),(3) mit $a = \infty$ erfüllt.

1.5 Beispiele von Regularisierungsmethoden (Fall $A = A^* \geq 0$).

a) Lawrentiewsche Methode $u_r = (r^{-1}I + A)^{-1}f$ entspricht der erzeugenden Funktion $g(\lambda) = (1+\lambda)^{-1}$, d.h.

$$g_r(x) = rg(rx) = r(1+r\lambda)^{-1} = (r^1+\lambda)^{-1}.$$

Die Bedingungen (2) und (3) sind mit $\gamma = 1$, $p_0 = 1$, $r_p = p^p(1-p)^{1-p}$ $(0 \leq p \leq 1)$ erfüllt.
Meistens benutzt man den Parameter $\alpha = r^{-1}$ statt r und bezeichnet $u_\alpha = (\alpha I + A)^{-1}f$. Für eine Integralgleichung erster Art $Au = f$ bedeutet die Anwendung der Lawrentiewschen Methode ein Übergang zu der Integralgleichung zweiter Art $\alpha u + Au = f$.

b) Spektralmethoden entsprechen den erzeugenden Funktionen

$$g(\lambda) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \lambda < 1 \\ 1/\lambda, & \lambda \geq 1 \end{cases}$$

und

$$g(\lambda) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \lambda < 1 \\ 1/\lambda, & \lambda \geq 1, \end{cases}$$

d.h.

$$g_r(\lambda) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \lambda < \frac{1}{r} \\ 1/\lambda, & \frac{1}{r} \leq \lambda < \infty, \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad g_r(\lambda) = \begin{cases} r, & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{r} \\ \frac{1}{\lambda}, & \frac{1}{r} \leq \lambda < \infty. \end{cases}$$

Die Bedingungen (2) und (3) sind mit

$$\gamma = 1,\ p_0 = \infty,\ \gamma_p = 1\ (0 \leq p < \infty) \text{ bzw. } \gamma = 1,\ p_0 = \infty,\ \gamma_p = \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}}$$

$(0 \leq p < \infty)$ erfüllt.
Im Falle eines kompakten Operators A mit

$$Au_i = \lambda_i u_i,\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq 0,\ (u_i,u_j) = \delta_{ij},$$

hat die Annäherung (4) die Form

$$u_r = \sum_{\lambda_i \geq \frac{1}{r}} \frac{(f,u_i)}{\lambda_i} u_i$$

bzw.

$$u_r = \sum_{\lambda_i \geq \frac{1}{r}} \frac{(f,u_i)}{\lambda_i} u_i + r\Big[f - \sum_{\lambda_i \geq \frac{1}{r}} (f,u_i)u_i\Big].$$

c) Eine Klasse von Iterationsverfahren.

Es sei $g : [0,a] \to \mathbb{R}$ eine Borel-meßbare Funktion. Betrachten wir die Iterationsmethode

$$u_n = u_{n-1} - g(A)(Au_{n-1}-f), \quad n = 1,2,\ldots .$$

Durch Induktion ist es leicht zu sehen, daß

$$u_n = (I-Ag(A))^n u_0 + \sum_{j=0}^{n-1} (I-Ag(A))^j g(A)f,$$

d.h.

$$u_n = (I-Ag_n(A))u_0 + g_n(A)f$$

mit

$$g_n(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} (1-\lambda g(\lambda))^j g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}[1-\lambda g(\lambda))^n].$$

Lemma: *Sei* $g : [0,a] \to \mathbb{R}$ *beschränkt, stetig für* $\lambda = 0$, $g(0) > 0$,

$$\sup_{\varepsilon\le\lambda\le a} |1- g(\lambda)| < 1 \quad \forall \varepsilon \in (0,a).$$

Dann sind für $g_n : [0,a] \to \mathbb{R}$ *die Bedingungen (2) und (3) mit* $p_0 = \infty$ *erfüllt:*

$$\sup_{0\le\lambda\le a} |g_n(\lambda)| \le \gamma n \quad (n = 1,2,\ldots), \quad \gamma = \sup_{0\le\lambda\le a} |g(\lambda)|,$$

$$\sup_{0\le\lambda\le a} \lambda^p |1-\lambda g_n(\lambda)| \le \gamma_p n^{-p} \quad (n = 1,2,\ldots;\ 0 \le p < \infty).$$

Beweis: [33], S. 37-38.

Explizite Iterationsverfahren entsprechen den Funktionen

$$g(\lambda) \equiv \mu = \text{const}, \quad \mu \in (0,\tfrac{2}{a}),$$

und haben die Form

$$u_n = u_{n-1} - \mu(Au_{n-1}-f), \quad n = 1,2,\ldots .$$

Es ist klar, daß gilt $\gamma = \mu$. Im Falle $\mu \in (0,\frac{1}{a}]$ ist $\gamma_p = (\frac{p}{\mu e})^p$ $(0 \le p < \infty)$.

Diese Iterationsverfahren kann man auch benutzen, um die Wärmeleitungsaufgabe mit der umgekehrten Zeit (siehe Sektion 1.2) zu lösen:

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} - (A\varphi_{n-1}-\psi), \quad n = 1,2,\ldots .$$

Die Anwendung von A zu φ_{n-1} bedeutet hier das Lösen einer wohlgestellten Wärmeleitungsaufgabe (mit der Zeit vorwärts): $A\varphi_{n-1} = u(x,T)$, wo u die Lösung der Aufgabe

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right), \quad x \in \Omega, \ 0 < t \le T,$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \ 0 \le t \le T,$$

$$u(x,0) = \varphi_{n-1}(x), \quad x \in \Omega$$

ist.

Implizite Iterationsverfahren entsprechen der Funktion

$$g(\lambda) = \frac{1}{\alpha+\lambda}, \ \alpha > 0 \quad (\Rightarrow \gamma = \tfrac{1}{\alpha},\ \gamma_p = (\alpha p)^p)$$

und hat die Form

$$\alpha u_n + Au_n = \alpha u_{n-1} + f, \quad n = 1,2,\ldots .$$

Diese Iterationsmethoden sind linear bezüglich f. Nichtlineare Methoden siehe z.B. in [1,15,24], sie gehen aus von Schema (2)-(4).

d) Stetige Version der Iterationsverfahren:

$$u'(t) + Au(t) = f, \quad u(0) = u_0$$

Die Lösung dieser Aufgabe

$$u_r := u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} f ds \quad (r = t)$$

hat die Form (4) mit $g_r(\lambda) = \frac{1-e^{-r\lambda}}{\lambda}$ und ist bei Funktion $g(\lambda) = \lambda^{-1}(1-e^{-\lambda})$ erzeugt. Die Bedingungen (2) und (3) sind mit

$$\gamma = 1, \ p_0 = \infty, \ \gamma_p = (\tfrac{p}{e})^p \quad (0 \le p < \infty)$$

erfüllt.

e) Iterierte Version der Lawrentiewschen Methode:

$$\begin{cases} u_{0,\alpha} = u_0 & \text{(Anfangsannäherung)} \\ \alpha u_{n,\alpha} + Au_{n,\alpha} = \alpha u_{n-1,\alpha} + f & (n = 1,\ldots,m),\ \alpha > 0, \\ u_r = u_{m,\alpha} & \end{cases}$$

ist wieder eine Methode der Klasse (4). Nämlich

$$u_{m,\alpha} = (I-Ag_{m,\alpha}(A))u_0 + g_{m,\alpha}(A)f$$

mit

$$g_{m,\alpha} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\alpha^j}{(\alpha+\lambda)^{j+1}} = \frac{1}{\lambda}\left[1-\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^m\right]$$

Es ist leicht nachprüfbar, daß

$$\sup_{0\le\lambda<\infty} |g_{m,\alpha}(\lambda)| = m\alpha^{-1},$$

$$\sup_{0\le\lambda<\infty} \lambda^p|1-\lambda g_{m,\alpha}(\lambda)| = (\tfrac{p}{m})^p\cdot(1-\tfrac{p}{m})^{m-p}\alpha^p \quad (0 \le p \le m).$$

Betrachtend $r = \alpha^{-1}$ als den Regularisationsparameter, sind Bedingungen (2) und (3) mit $p_0 = m$ erfüllt.
Bedingungen (2) und (3) sind auch bezüglich $r = m\alpha^{-1}$ erfüllt. Das erlaubt uns, auch beide Parameter m und α gleichzeitig zu variieren. Dabei $p_0 = \infty$, falls $m \to \infty$, wenn $r = m\alpha^{-1} \to \infty$.

1.6 Konvergenz bei exakten Daten. (Fall $A = A^* \ge 0$)

Mit $R(A)$ bezeichnen wir das Bild von A.

Satz 1 Es sei $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le a$ und (3) sei erfüllt. Dann gelten für die Annäherung (4) die folgenden Behauptungen.

1. *Für jedes $f \in H$ gilt $Au_r \to Pf$ $(r\to\infty)$, wo P der Orthoprojektor zu $\overline{R(A)}$ ist.*
2. *Für jedes $f \in R(A)$ gilt $u_r \to u_*$ $(r\to\infty)$, wo u_* die zu u_0 nächste Lösung der Gleichung (1) ist. Im Falle*

$$u_0 - u_* = A^p v, \quad p \ge 0,$$

gelten die Fehlerabschätzungen

$$\|A^q(u_r-u_*)\| \le \gamma_{p+q}\|v\|\, r^{-(p+q)} \quad (p\ge 0, q \ge 0, p+q \le p_0),$$

$$\|A^q(u_r-u_*)\| = o(r^{-(p+q)}) \quad (p\ge 0, q\ge 0, p+q < p_0).$$

3. *Sei $|g_r(0)| \to \infty$ $(r\to\infty)$ erfüllt. Dann gilt für $f \notin R(A)$*

$$\|u_r\| \to \infty \quad (r\to\infty).$$

Bemerkung: Nur die Fehlerabschätzungen benutzen die Bedingung (3) völlig, für die anderen Behauptungen ist das Folgende hinreichend:

$$(3') \quad \sup_{0\le\lambda\le a} |1-\lambda g_r(\lambda)| \le \gamma_0 = \text{const} \quad (r > 0),$$

$$(3'') \qquad 1-\lambda g_r(\lambda) \to 0 \quad (r\to\infty) \quad \forall\, \lambda \in (0,a].$$

Zuerst beweisen wir zwei Hilfssätze.

Lemma 1. Aus (3') und (3") folgt, daß

$$(I-Ag_r(A))w \to P_0 w \quad (r\to\infty) \quad \forall\, w \in H,$$

wo P_0 der Orthoprojektor auf $N(A)$ (Nullraum von A) ist.

Beweis: Weil $P_0 + P = I$, $(I-Ag_r(A))P_0 w = P_0 w$, ist es nötig zu zeigen, daß $(I-Ag_r(A))Pw \to 0$ $(r\to\infty)$.
Das Element $v := Pw$ ist zu $N(A)$ orthogonal, deshalb hat die einpunktige Menge $\{0\}$ bezüglich $d(P(\lambda)v,v)$ das Maß 0, und die Konvergenz

$$\|(I-Ag_r(A))Pv\|^2 = {}_0\!\int^a |1-\lambda g_r(\lambda)|^2 d(P(\lambda)v,v) \to 0 \quad (r\to\infty)$$

folgt aus (3') und (3") nach dem Satz von Lebesgue.

Lemma 2. Aus (3) folgt, daß für $0 \le p < p_0$ gilt

$$r^p\|A^p(I-Ag_r(A))v\| \to 0 \quad (r\to\infty) \quad \forall\, v \in \overline{R(A)}.$$

Beweis: Das folgt aus dem Satz von Banach-Steinhaus, weil

$$r^p\|A^p(I-Ag_r(A))\| \le \underline{r^p\gamma_p r^{-p}} = \gamma_p \quad (r > 0)$$

und für $\varepsilon > 0$, $p+\varepsilon \le \gamma_0$, gilt $\overline{R(A^\varepsilon)} = \overline{R(A)}$,

$$r^p\|A^p(I-Ag_r(A))A^\varepsilon w\| \le \gamma_{p+\varepsilon}\|w\|\, r^{-\varepsilon} \to 0 \quad (r\to\infty).$$

Beweis des Satzes 1:

1. $Au_r - f = (I-Ag_r(A))(Au_0-f) \xrightarrow[L.1]{} P_0(Au_0-f) = -P_0 f,$
   $Au_r \to f - P_0 f = Pf.$
2. $u_r - u_* = (I-Ag_r(A))(u_0-u_*)$, $u_0 - u_* \perp N(A)$,
   $u_r - u_* \xrightarrow[L.1]{} P_0(u_0-u_*) = 0.$
   $u_0 - u_* = A^p v \Rightarrow A^q(u_r-u_*) = A^{p+q}(I-Ag_r(A))v,$
   benutzen (3) und L.2.
3. Sei $r_n \to \infty$, $\|u_{r_n}\| \le \text{const}.$

Wir haben zu beweisen, daß $f \in R(A)$. Aus (4) und (3') sehen wir, daß $\| g_{r_n}(A)f\| \leq \text{const}$ $(n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\})$, damit hat die Folge $g_{r_n}(A)f$ eine schwach konvergierende Teilfolge: $g_{r_n}(A)f \rightharpoonup u' \in H$ $(n \in \mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N})$. Nach Lemma 1 $Ag_{r_n}(A)f \to Pf$. Damit $Au' = pf$, $pf \in R(A)$. Weil

$$P_0 g_{r_n}(A)f = g_{r_n}(0)P_0 f$$

für $n \to \infty$ beschränkt ist, aber $|g_{r_n}(0)| \to \infty$, ist $P_0 f = 0$; $f \in R(A)$.

1.7 Symmetrisierung der allgemeinen linearen Aufgabe

Betrachten wir nun die allgemeine lineare Gleichung

(1) $Au = f$, $A \in L(H,F)$, H,F-Hilberträume.

Mit $A^* \in L(F,H)$ bekommen wir die Aufgabe

(1') $A^*Au = A^*f$, $A^*A \in L(H,H)$, $(A^*A)^* = A^*A \geq 0$.

Aufgabe (1') ist äquivalent mit der Aufgabe

$Au = Qf$, Q-Orthoprojektor zu $\overline{R(A)} \subseteq F$

und mit der Extremalaufgabe

$\| Au-f\|^2 \to \min$.

Wir werden die folgende Terminologie benutzen:

Quasilösung von (1) $\underset{\text{Def.}}{=}$ Lösung von (1');

Pseudolösung von (1) $\underset{\text{Def.}}{=}$ Quasilösung mit minimaler Norm.

1.8 Regularisierungsverfahren für allgemeine lineare Aufgaben (Fall $A \in L(H,F)$)

Betrachten wir wieder die allgemeine lineare Aufgabe

(1) $Au = f$, $A \in L(H,F)$, $\| A\|^2 \leq a$

und die entsprechende symmetrisierte Aufgabe

(1') $A^*Au = A^*f$.

Es sei eine Familie von Borel-meßbaren Funktionen $g_r : [0,a] \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), $r > 0$, wie in der Sektion 1.3 vorgegeben, die den Bedingungen (2) und (3) genügen.

Die Annäherung zur Lösung (oder Quasilösung) von (1) konstruieren wir mittels der Formel

(4') $u_r = (I - A^*Ag_r(A^*A))u_0 + g_r(A^*A)A^*f$

(das ist die Formel (4), angewendet auf (1')).

Die Beispiele konkreter Methoden sind die selben wie in der Sektion 1.5. Der Lawrentiewschen Methode (1962) entspricht die Tichonowsche Methode (1963)

$$u_r = (r^{-1}I + A^*A)^{-1}A^*f \quad (\text{oder } u_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*f,\ \alpha = 1/r).$$

1.9 Konvergenz bei exakten Daten (Fall $A \in L(H,F)$).

Satz 2. Sei $A \in L(H,F)$, $\| A\|^2 \leq a$ *und (3) erfüllt. Dann gelten für die Annäherung (4') die folgenden Behauptungen.*

1. *Für jedes* $f \in F$, $Au_r \to Qf$ $(r \to \infty)$.
2. *Falls* $Qf \in R(A)$, *dann* $u_r \to u_*$ $(r \to \infty)$, *wo* u_* *die zu* u_0 *nächste Lösung von (1') (Quasilösung von (1)) ist.*
   Im Falle
   $$u_0 - u_* = |A|^p v,\ p \geq 0 \quad (|A| = (A^*A)^{1/2})$$
   gelten die Fehlerabschätzungen
   $$\|\, |A|^q(u_r - u_*)\| \leq \gamma_{(p+q)/2} \| v\|\, r^{-(p+q)/2}$$
   $$(p \geq 0,\ q \geq 0,\ p+q \leq 2p_0),$$
   $$\|\, |A|^q(u_r - u_*)\| = o(r^{-(p+q)/2})$$
   $$(p \geq 0,\ q \geq 0,\ p+q < 2p_0).$$
3. *Falls* $Qf \notin R(A)$, *dann* $\| u_r\| \to \infty$ $(r \to \infty)$.

<u>Beweis:</u> [33], S. 45-46, oder selbständig. Hinweise:

$$Au_r - f = (I - AA^* g_r(AA^*))(Au_0 - f),$$

$$A^*(Au_r - f) = (I - A^* A g_r(A^* A)) A^* (Au_0 - f)$$

$$u_r - u_* = (I - A^* A g_r(A^* A))(u_0 - u_*);$$

man muß beachten, daß

$$A g(A^* A) = g(AA^*) A.$$

Auch die Polarzerlegung eines Operators $A \in L(H,F)$ ist nützlich:

$$A = U(A^* A)^{1/2} = (AA^*)^{1/2} U, \quad U \in L(H,F)$$

$$\| Uv \| = \| v \| \quad \forall\ v \in \overline{R(A^*)} \subseteq H, \quad Uv = 0 \quad \forall\ v \in R(A^*)^{\perp} = N(A) \subseteq H,$$

$$\| U^* z \| = \| z \| \quad \forall\ z \in \overline{R(A)} \subseteq F, \quad U^* z = 0 \quad \forall\ z \in R(A)^{\perp} = N(A^*) \subseteq F.$$

Ein interessanter Vergleich verschiedener Methoden ist in [25] zu finden.

2. ANALYSIS DER OPTIMALITÄT UND QUASIOPTIMALITÄT DER REGULARISIERUNGSMETHODEN

2.1 <u>Aufgabenstellung, Konvergenz und Fehlerabschätzungen beim ungenauen rechten Term.</u>

Aufgabe:

(1) $Au = f$, $A \in L(H,H)$, $A = A^* \geq 0$, $\| A \| \leq a$, H-Hilbertraum. Anstatt $f \in R(A)$ ist $f_\delta \in H$, $\| f_\delta - f \| \leq \delta$, gegeben.

Sei $g_r : [0,a] \to \mathbb{R}$, $0 < r < \infty$, eine Familie von Borel-meßbaren Funktionen mit den Eigenschaften (siehe Sektion 1.3)

(2) $\sup\limits_{0 \leq \lambda \leq a} |g_r(\lambda)| \leq \gamma r \quad (r > 0)$, $\gamma = \text{const}$.

(3) $\sup\limits_{0 \leq \lambda \leq a} \lambda^p |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leq \gamma_p r^{-p} \quad (r > 0, 0 \leq p \leq p_0)$, $\gamma = \text{const}$.

Für die Näherungslösung

(4) $u_r = (I - A g_r(A)) u_0 + g_r(A) f_\delta$

haben wir

(5) $u_r - u_* = (I - A g_r(A))(u_0 - u_*) + g_r(A)(f_\delta - f)$,

wo u_* eine (genaue) Lösung von (1) ist. Hieraus

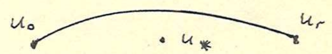
(5') $\| u_r - u_* \| \leq \| I - A g_r(A))(u_0 - u_*) \| + \gamma r \delta$,

weil $\| g_r(A) \| \leq \sup\limits_{0 \leq \lambda \leq a} |g_r(\lambda)| \leq \gamma r$ und $\| f_\delta - f \| \leq \delta$.

Ist u_* die zu u_0 nächste Lösung, so ist $u_0 - u_* \perp N(A)$ und (siehe Sektion 1.6, Lemma 1)

$$\|(I - A g_r(A))(u_0 - u_*)\| \to 0 \quad (r \to \infty).$$

Aber $\gamma r \delta \to \infty$, wenn $r \to \infty$; dabei $u_r \to u' \in A^{-1} f_\delta$ oder $\| u_r \| \to \infty$ (falls $f_\delta \notin R(A)$). Grenzübergang $r \to \infty$ ist unvernünftig, man müßte minimisieren $\| u_r - u_* \|$ bezüglich $r > 0$.



Eine solche Minimisierung ist doch unmöglich, da wir u_* nicht kennen. Es entsteht die Hauptfrage von Regularisierungsmethoden: wie soll man den Regularisierungsparameter $r = r(\delta)$ wählen?

Satz 1. Sei $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq a$, $f \in R(A)$, $\|f_\delta - f\| \leq \delta$ *und es seien die Bedingungen (2), (3) erfüllt. Wählen wir* $r = r(\delta)$ *in (4) so, daß*

$$r(\delta) \to \infty,\ \delta r(\delta) \to 0, \text{ wenn } \delta \to 0.$$

Dann

$$u_{r(\delta)} \to u_*, \text{ wenn } \delta \to 0,$$

wobei u_* *die zu* u_0 *nächste Lösung von (1) ist.*

Beweis: Das folgt aus (5') unmittelbar.

Satz 2. Die Bedingungen des Satzes 1 seien erfüllt und es sei

(6) $$u_0 - u_* = A^p v,\ \|v\| \leq \theta,\ p > 0.$$

Wählen wir

$$r = r(\delta) = d_p \theta^{\frac{1}{p+1}} \delta^{-\frac{1}{p+1}} \text{ mit } d_p = \left(\frac{p\gamma_p}{\gamma}\right)^{\frac{1}{p+1}},$$

dann

$$\|u_r - u_*\| \leq c_p \theta^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}} \quad (0 \leq p \leq p_0),$$

$$c_p = \left(p^{\frac{1}{p+1}} + p^{-\frac{1}{p+1}}\right) \gamma^{\frac{p}{p+1}} \gamma_p^{\frac{1}{p+1}}.$$

Beweis: Nun

$$\|(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\| = \|(I - Ag_r(A))A^p v\| \leq \|(I - Ag_r(A))A^p\|\, \theta \leq$$
$$\leq \sup_{0 \leq \lambda \leq a} \lambda^p |1 - \lambda g_r(\lambda)|\, \theta \leq \gamma_p r^{-p} \theta,$$

und die Ungleichung (5') nimmt die Form

$$\|u_r - u_*\| \leq \gamma_p \theta r^{-p} + \gamma r \delta.$$

Minimisierend diese Abschätzung bezüglich $r > 0$ (arithmetrische Rechnungen), bekommen wir die Parameterauswahl und die Fehlerabschätzung des Satzes.

Bemerkung (Aufgabe). Sei $\sigma(A) = [0,a]$ und (2) und (3) gelte als Gleichheiten. Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren dann v ($\|v\| \leq \theta$) und f_δ ($\|f_\delta - f\| \leq \delta$), so daß im Falle $u_0 - u_* = A^p v$ $(0 < p \leq p_0)$ für alle $r > 0$

$$\|u_r - u_*\| \geq \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2}}\, c_p\, \theta^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}$$

(c_p wie im Satze 2).

Beispiel: Spektralmethode mit $g_r(\lambda) = \begin{cases} r, & 0 \leq \lambda < \frac{1}{r} \\ \frac{1}{\lambda}, & \lambda > \frac{1}{r} \end{cases}$.

In diesem Falle $p_0 = \infty$, $\gamma = 1$, $\gamma_p = p^p (p+1)^{-(p+1)}$, und folglich (arithmetische Rechnungen)

$$d_p = \frac{p}{p+1},\quad c_p = 1.$$

Somit gibt es eine Methode, für die

$$\|u_r - u_*\| \leq \theta^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}} \quad (0 < p < \infty),$$

wenn Angangsfehler $u_0 - u_*$ die Form (6) hat.

Arithmetische Rechnungen zeigen auch, daß für andere Methoden von Sektion 1.5 $c_p > 1$. Doch kann man hieraus nicht folgern, daß diese Methoden ungenauere sind: wir minimierten nicht den Fehler $\|u_r - u_*\|$, sondern seine Abschätzung.
Ist $c_p > \sqrt{2}$, so kann man mit Hilfe der Bemerkung (Aufgabe) doch folgern, daß die entsprechende Methode eine ungenauere als die Spektralmethode ist.

2.2 Optimalitätsbegriffe. Betrachten wir hier eine allgemeinere Aufgabe als (1):

$$Au = f,\ A : E \to F,\ E, F\text{-Banachräume};$$

anstatt f sei wieder seine Näherung f_δ, $\|f_\delta - f\| \leq \delta$, gegeben.
Jede Abbildung $P : F \to E$ kann als eine Methode betrachtet werden: Pf_δ ist Näherungslösung.
Sei $M \subset E$ eine Menge. Die Größe

$$\varphi(\delta, P) := \varphi(\delta, P, A, M) = \sup_{\substack{u \in M,\, f_\delta \in F \\ \|Au - f_\delta\| \leq \delta}} \|Pf_\delta - u\|$$

charakterisiert den maximalen Fehler der Methode P, wenn die Lösung in M variiert. Eine parameterabhängige Methode P_δ heißt

- optimal auf M, wenn $\varphi(\delta, P_\delta) = \inf_P \varphi(\delta, P)$;
- asymptotisch optimal auf M, wenn

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\varphi(\delta,P_\delta)}{\inf\limits_{P} \varphi(\delta,P)} = 1;$$

- quasioptimal (oder ordnungsoptimal) auf M, wenn

$$\varphi(\delta,P_\delta) \le \underbrace{c}_{\text{Quasioptimalitätskonstante } (\ge 1)} \inf_{P} \varphi(\delta,P),\quad 0<\delta\le\delta_0 .$$

Lemma 1. Der Operator $A: E\to F$ *sei linear und die Menge* M *sei zentralsymmetrisch. Dann gilt*

$$\inf_{P} \varphi(\delta,P,A,M) \ge w(\delta,A,M) := \sup_{u\in M,\ \|Au\|\le\delta} \|u\| .$$

Beweis: Es sei $\varepsilon>0$. Nehmen wir ein $\tilde u\in M$, so daß $\|A\tilde u\|\le\delta$, $\|\tilde u\|\ge w(\delta,A,M)-\varepsilon$. Dann ist auch $-\tilde u\in M$ (die zentrale Symmetrie von M). Nun ersetzen wir das Supremum in der Definition von $\varphi(\delta,P,A,M)$ über $u\in M$ durch das Maximum über zwei Elemente ($\tilde u$ und $-\tilde u$):

$$\varphi(\delta,P,A,M) \ge \max\left\{ \sup_{\substack{f_\delta \\ \|f_\delta - A\tilde u\|\le\delta}} \|Pf_\delta-\tilde u\| ,\ \sup_{\substack{f_\delta \\ \|f_\delta + A\tilde u\|\le\delta}} \|Pf_\delta+\tilde u\| \right.$$

Die Suprema über f_δ ersetzen wir durch $f_\delta=0$:

$$\begin{aligned}\varphi(\delta,P,A,M) &\ge \max\{\|P0-\tilde u\|,\|P0+\tilde u\|\}\ge\\ &\ge \tfrac{1}{2}(\|P0-\tilde u\|+\|P0+\tilde u\|)\ge\\ &\ge \tfrac{1}{2}\|(P0-\tilde u)-(P0+\tilde u)\| =\\ &= \|\tilde u\|\ge w(\delta,A,M)-\varepsilon;\quad \varepsilon\to 0.\end{aligned}$$

2.3 Quellemengen des Operators $A\in L(H,F)$ (H,F-Hilberträume).

So heißen die Mengen

$$M_{p\theta} = M_{p\theta}(A) = \{u\in H : u=|A|^p v,\ \|v\|\le\theta\},\ p>0,\theta>0,$$

wobei

$$|A| = (A^*A)^{1/2},\quad A^*A\in L(H,H).$$

Lemma 2. $w(\delta,A,M_{p\theta}(A)) = \theta^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{p}{p+1}}$, *wenn* $\frac{\delta^2}{\theta^2}\in\sigma\left((A^*A)^{p+1}\right)$.

Beweis: Gemäß den Definitionen

$$w(\delta,A,M_{p\theta}) = \sup_{u\in M_{p\theta},\ \|Au\|\le\delta} \|u\| = \sup_{\|v\|\le\theta,\ \||A|^{p+1}v\|\le\delta} \||A|^p v\|$$

Für einen Operator $B=B^*\ge 0$ gilt die "Momentenungleichung"

$$\|B^p u\|\le\|B^q u\|^{\frac{p}{q}}\|u\|^{1-\frac{p}{q}}\quad (0\le p\le q).$$

Benutzen wir diese Ungleichung für $B=|A|^p$ mit $q=p+1$, so bekommen wir

$$\||A|^p v\|\le\||A|^{p+1}v\|^{\frac{p}{p+1}}\|v\|^{\frac{1}{p+1}}$$

und

$$w(\delta,A,M_{p\theta})\le\theta^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{p}{p+1}} .$$

Nun sei $(\delta/\theta)^2$ ein Eigenwert von $(A^*A)^{p+1}$ und damit δ/θ ein Eigenwert von $|A|^{p+1}$:

$$|A|^{p+1}v_0 = \tfrac{\delta}{\theta}v_0,\quad \|v_0\|=\theta .$$

Dann $\||A|^{p+1}v_0\|=\delta$ und

$$w(\delta,A,M_{p\theta})\ge\||A|^p v_0\| = \left(\tfrac{\delta}{\theta}\right)^{\frac{p}{p+1}}\|v_0\| = \theta^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{p}{p+1}} .$$

Aus zwei Ungleichungen für $w(\delta,A,M_{p\theta})$ folgt die Gleichung

$$w(\delta,A,M_{p\theta}) = \theta^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{p}{p+1}} .$$

Ist $(\delta/\theta)^2\in\sigma\left((A^*A)^{p+1}\right)$ kein Eigenwert, dann gehört es zu dem stetigen Spektrum von $(A^*A)^{p+1}$, und es gibt eine Folge (v_n) mit den Eigenschaften

$$\||A|^{p+1}v_n - \tfrac{\delta}{\theta}v_n\|\to 0,\quad \|v_n\|=\theta ,$$

und der Beweis geht mit kleinen Modifikationen.

Bemerkung: $w(\delta,A,M_{p\theta}(A)) < \theta^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{p}{p+1}}$, wenn $\frac{\delta^2}{\theta^2}\notin\sigma\left((A^*A)^{p+1}\right)$;

es gibt eine Formel für $w(\delta,A,M_{p\theta})$ auch in diesem Falle, doch ist die Formel zu kompliziert für die Benutzung.

Folgerungen:

1. Methoden (2) mit Parameterauswahl wie in Satz 2 sind quasioptimal auf $M_{p\theta}$ $(0 < p \le p_0,\ \theta > 0)$.
2. Spektralmethode mit entsprechender Parameterauswahl ist optimal auf $M_{p\theta}$ für alle $p > 0,\ \theta > 0$.

2.4 Analysis der Optimalität. Es sei wieder $A = A^* \ge 0$.

Bezeichnen wir

$$M_{p\theta u_0} = \{u \in H : u_0 - u = A^p v,\ \|v\| \le \theta\},$$

damit $M_{p\theta 0} = M_{p\theta}$ die Quellenmenge von A. Es interessiert uns, wann für die Methode (4) die Abschätzung

$$(7)\qquad \sup_{\substack{u\in M_{p\theta u_0},\, f_\delta\in H\\ \|Au-f_\delta\|\le\delta}} \|u_r - u\| \le \theta^{\frac{1}{p+1}}\,\delta^{\frac{p}{p+1}}$$

gilt. Eine solche Methode ist, wie wir schon wissen, gegeben bei der Spektralmethode.

Bisher war (5') unser Ausgangspunkt. Doch kann (5') ungenau sein - wir haben zu (5) Dreieckungleichung benutzt. Nun gehen wir von (5) unmittelbar aus:

$$\sup_{\substack{u\in M_{p\theta u_0},\, f_\delta\in H\\ \|Au-f_\delta\|\le\delta}} \|u_r - u\| = \sup_{\substack{u\in M_{p\theta u_0},\, f_\delta\in H\\ \|Au-f_\delta\|\le\delta}} \|(I - Ag_r(A))(u_0 - u) + g_r(A)(f_\delta - Au)\| =$$

$$= \sup_{\|v\|\le\theta,\,\|z\|\le\delta} \|(I - Ag_r(A))A^p v + g_r(A)z\| =$$

$$= \sup_{\|v\|\le 1,\,\|z\|\le 1} \|\theta(I - Ag_r(A))A^p v + \delta g_r(A)z\| .$$

Dieses Supremum kann man mit Hilfe von Melkman-Micchelli's Formel finden (siehe [16]:

Für beliebige Operatoren $C_i \in L(X, X_i)$, $i = 1,2,3$ (X, X_i-Hilberträume) gilt die Gleichung

$$\sup_{\|C_1x\|\le 1,\,\|C_2x\|\le 1} \|C_0x\| = \inf_{0<t<1}\ \sup_{[t\|C_1x\|^2 + (1-t)C_2x\|^2]^{1/2}\le 1} \|C_0x\|$$

Diese Idee ist realisiert in [29] und [33], die Überlegungen sind doch zu technisch für eine Vorlesung. Ich bringe nur das Resultat:

Satz 3. *Sei* $A = A^* \ge 0$, *und sei* $g_r(\lambda) = rg(r\lambda)$, $r > 0$, *wobei* $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *eine differenzierbare Funktion ist,*

$$\gamma_p := \sup_{0\le\lambda<\infty} \lambda^p |1 - \lambda g(\lambda)| < \infty \quad (0 \le p \le p_0);$$

es sei $h'(\lambda) < 0$ $(0 < \lambda < \infty)$ für $h(\lambda) := 1 - \lambda g(\lambda)$. Dann gelten die folgenden Behauptungen:

1. Falls

$$(8)\quad (p+1)\left[h^{-1}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)\right]^{-2p} \lambda^{2p} h^2(\lambda) + \frac{(p+1)}{p}\left[h^{-1}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)\right]^2 g^2(\lambda) \le 1 \quad \forall \lambda \in [0,\infty)$$

für ein $p \in (0, p_0]$ gilt, dann ist die Methode (4) mit

$$r = h^{-1}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)\theta^{\frac{1}{p+1}}\delta^{-\frac{1}{p+1}}$$

optimal auf $M_{p\theta u_0}$, i.e. (7) gilt.

2. Ist (8) für ein $\lambda \in [0,\infty)$ verletzt, so ist auch (7) bei jeder Parameterauswahl $r = r(\delta, p, \theta)$ mindestens für $\delta/\theta \in \sigma(A^{p+1})$ verletzt, d.h. die Methode (4) kann nicht auf $M_{p\theta u_0}$ optimal sein.

Beispiel: Lawrentiewsche Methode, $g(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda}$. Dann auch $h(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda}$, und (8) nimmt die Form

$$(p+1)\left[p^{-2p}\lambda^{2p} + p\right](1+\lambda)^{-2} \le 1 \quad (0 \le \lambda < \infty).$$

Diese Bedingung ist für $0 < p \le \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ erfüllt und für $p > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ verletzt. Damit ist die Lawrentiewsche Methode nur für $0 < p \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ auf $M_{p\theta}$ optimal, wobei $r = \frac{1}{\alpha} = p(\theta/\delta)^{\frac{1}{p+1}}$ die entsprechende Parameterauswahl ist. Dank Satz 2 ist die Lawrentiewsche Methode quasioptimal für $p \le 1$. Andere Beispiele siehe in [29,30,33]; siehe auch [9].

2.5 Der Fall mit nichtselbstadjungiertem Operator

(1) $Au = f$, $A \in L(H,F)$, $\|A\|^2 \le a$, H,F-Hilberträume,

(1') $A^*Au = A^*f_\delta$,

(4') $u_r = (I - A^*Ag_r(A^*A))u_0 + g_r(A^*A)A^*f_\delta$.

Satz 1'. *Sei* $A \in L(H,F)$, $\|A\| \le a$, $Qf \in R(A)$, $\|f - f\| \le \delta$ *und es seien* (2) *und* (3) *erfüllt. Wählen wir* $r = r(\delta)$ *in* (4') *so, daß*

$$r(\delta) \to \infty, \quad \delta^2 r(\delta) \to 0, \quad \text{wenn } \delta \to 0.$$

Dann $u_{r(\delta)} \to u_*$, *wenn* $\delta \to 0$, *wobei* u_* *die zu* u_0 *nächste Quasilösung (Lösung von* (1')) *ist.*

Satz 2'. *Die Bedingungen des Satzes 1' seien erfüllt und es sei*

$$u_0 - u_* = |A|^p v, \quad \|v\| \le \theta, \quad p > 0.$$

Wählen wir

$$r = r(\delta) = d_p\, \theta^{\frac{2}{p+1}} \delta^{-\frac{2}{p+1}}, \quad d_p = \left(\frac{p\gamma_{p/2}}{\gamma_*}\right)^{\frac{2}{p+1}},$$

$$\gamma_* = \sup_{r>0} r^{-1/2} \sup_{0 \le \lambda \le a} \lambda^{1/2} |g_r(\lambda)|.$$

Dann

$$\|u_r - u_*\| \le c_p\, \theta^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}} \quad (0 < p \le 2p_0),$$

$$c_p = \left(p^{\frac{1}{p+1}} + p^{-\frac{p}{p+1}}\right) \gamma_*^{\frac{p}{p+1}} \gamma_{1/2}^{\frac{1}{p+1}}.$$

Satz 3'. *Sei* $A \in L(H,F)$ *und* $g_r(\lambda)$ *sei wie in dem Satze 3. Dann gelten die folgenden Behauptungen:*

1. Falls

$$(8') \quad (p+1)\left[h^{-1}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)\right]^{-p} \lambda^p h^2(\lambda) + \frac{p+1}{p} h^{-1}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)\lambda g^2(\lambda) \le 1 \quad \forall \lambda \in [0,\infty)$$

für ein $p \in (0, 2p_0]$ gilt, so ist die Methode (4') mit

$$r = h^{-1}\left(\tfrac{1}{p+1}\right) \theta^{\frac{2}{p+1}} \delta^{-\frac{2}{p+1}}$$

optimal auf $M_{p\theta u_0} = \{u \in H : u_0 - u = |A|^p v, \|v\| \le \theta\}$, i.e (7) gilt.

2. Ist (8') für ein $\lambda \in [0,\infty)$ verletzt, so ist auch (7) bei jeder Parameterauswahl $r = r(\delta,p,\theta)$ mindestens für $(\delta/\theta)^2 \in \sigma((A^*A)^{p+1})$ verletzt, i.e. Methode (4') kann nicht auf $M_{p\theta u_0}$ optimal sein.

Beispiel:

Tichonowsche Methode $u_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*f_\delta$ mit $\alpha = \frac{1}{p}(\delta/\theta)^{2/(p+1)}$ ist optimal auf $M_{p\theta}$ für $0 < p \le 2$, $\theta > 0$.

Andere Beispiele siehe in [29],[30],[33].

3. PARAMETERAUSWAHL NACH DISKREPANZPRINZIP

3.1 Aufgabenstellung wie in Sektion 2.1:

(1) $Au = f,\ A \in L(H,H),\ A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq a$, H-Hilbertraum,

$g_r : [0,a] \to \mathbb{R}$ Borel-meßbar, $r > 0$,

(2) $\sup_{0\leq\lambda\leq a} |g_r(\lambda)| \leq \gamma r \ (r > 0),\ \gamma = \text{const}$,

(3) $\sup_{0\leq\lambda\leq a} \lambda^p |1-\lambda g_r(\lambda)| \leq \gamma_p r^{-p} \ (r > 0,\ 0 \leq p \leq p_0),\ \gamma_p = \text{const}$,

(4) $u_r = (I-Ag_r(A))u_0 + g_r(A)f_\delta, \quad \|f_\delta - f\| \leq \delta$.

Nun wird $r = r(\delta) = r(\delta, f_\delta)$ mit Hilfe des Diskrepanzprinzips gewählt, d.h. wir wählen r so, daß $\|Au_r - f_\delta\|$ mit δ vergleichbar wird.

3.2 Eigenschaften der Diskrepanz.

Lemma 1. $\lim_{r\to 0} \|Au_r - f_\delta\| = \|Au_0 - f_\delta\|$;

$\lim_{r\to\infty} \|Au_r - f_\delta\| = \inf_{u\in H} \|Au - f_\delta\|$;

ist $g_r(\lambda)$ *stetig in* r, *so ist* $\|Au_r - f_\delta\|$ *stetig in* r;

ist $|1-\lambda g_r(\lambda)|$ *fallend in* r, *so ist* $\|Au_r - f_\delta\|$ *fallend in* r.

Beweis:

zu der ersten Behauptung:

$Au_r - f_\delta = (I-Ag_r(A))(Au_0 - f_\delta)$, wobei $\|Ag_r(A)\| \leq \|A\|\,\|g_r(A)\| \overset{(2)}{\leq} \|A\|\,\gamma r \to 0$ $(r \to 0)$.

Zu der zweiten Behauptung (siehe Sektion 1.6, Satz 1.1):

$Au_r - f_\delta \to Pf_\delta - f_\delta$ ($r \to \infty$; P-Orthoprojektor zu $\overline{R(A)}$),

$\|Au_r - f_\delta\| \to \|Pf_\delta - f_\delta\| = \inf_{u\in H} \|Au - f_\delta\|$.

zu der dritten und vierten Behauptung:

$Au_r - f_\delta = (I-Ag_r(A))z,\ z = Au_0 - f_\delta$,

$\|Au_r - f_\delta\|^2 = \int_0^a |1-\lambda g_r(\lambda)|^2 d\langle P(\lambda)z, z\rangle$.

Folgerung: Ist $f \in R(A)$, $Au_* = f$, so gilt

$$\lim_{r\to\infty} \|Au_r - f_\delta\| \leq \|Au_* - f_\delta\| \leq \delta;$$

ist zusätzlich $N(A) \neq \{0\}$ und $f_\delta - f \in N(A)$, $\|f_\delta - f\| = \delta$, so gilt

$$\lim_{r\to\infty} \|Au_r - f_\delta\| = \delta.$$

3.3 Parameterauswahl.

Regel 1. Wir geben die Zahlen $b_1 > 1$ und $b_2 \geq b_1$ vor. Ist $\|Au_0 - f_\delta\| \leq b_2\delta$, so wählen wir $r=0$ (und betrachten u_0 als die Näherungslösung von (1)). Ist $\|Au_0 - f_\delta\| > b_2\delta$, so wählen wir ein beliebiges $r = r(\delta)$, so daß die Ungleichungen

$$b_1\delta \leq \|Au_r - f_\delta\| \leq b_2\delta$$

erfüllt sind.

Regel 2. Wir geben die Zahlen $b > 1$ und $\theta \in (0,1)$ vor. Ist $\|Au_0 - f_\delta\| \leq b\delta$, so wählen wir $r=0$ als Regularisierungsparameter. Ist $\|Au_0 - f_\delta\| > b\delta$, so wählen wir ein beliebiges $r = r(\delta)$, so daß

$$\|Au_r - f_\delta\| \leq b\delta,$$

$$\|Au_{r'} - f_\delta\| \geq b\delta \text{ für ein } r' \in [\theta r, r].$$

Regel 2 ist insbesondere bequem für Iterationsverfahren: unterbricht man die Iteration mit dem ersten n, für das $\|Au_n - f_\delta\| \leq b$, so ist für $n' = n-1$ automatisch $\|Au_{n-1} - f_\delta\| > b\delta$.

3.4 Hilfssatz.

Lemma 2. Sei $w \in N(A)^{\perp}$. *Dann sind für beliebige* $r = r(\delta)$ *die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) $\qquad (I - Ag_r(A))w \to 0 \quad (\delta \to 0)$;

(ii) $\qquad A(I - Ag_r(A))w \to 0 \quad (\delta \to 0)$.

Beweis: Es ist klar, daß (i)⇒(ii). Für $r = r(\delta) \to \infty$ $(r \to \infty)$ ist auch (ii)⇒(i) trivial: aufgrund von Sektion 1.6, Lemma 1, folgt $\|(I - Ag_r(A))w\| \to 0$ $(r \to \infty)$. Damit genügt es den Fall zu betrachten, daß $r_n = r(\delta_n) \leq \bar{r} = \text{const}$, $\delta_n \to 0$ und $\|Av_n\| \to 0$ für

$$v_n = (I - Ag_{r_n}(A))w \; ;$$

wir haben zu zeigen, daß $\|v_n\| \to 0$. Weil $\|v_n\| \leq \gamma_0 \|w\|$, ist die Folge (v_n) beschränkt und damit schwach kompakt; es sei

$$v_n \dashrightarrow v' \quad (n \in N' \subseteq \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}).$$

Dann ist $Av_n \dashrightarrow Av'$ $(n \in N')$ und $Av' = 0$, $v' \in N(A)$. Nun folgt

$$\|v_n\|^2 = (v_n, (I - Ag_{r_n}(A))w) = (v_n, w) - (Av_n, g_{r_n}(A)w) \to (v', w) = 0$$

$$(n \in N') \; ,$$

weil $\|Av_n\| \to 0$, $\|g_{r_n}(A)\| \leq \gamma r_n \leq \gamma \bar{r}$, $v' \in N(A)$, $w \in N(A)^{\perp}$. Alle schwach konvergierenden Teilfolgen von (v_n) konvergieren also stark gegen 0. Das bedeutet, daß $\|v_n\| \to 0$.

3.5 Konvergenz und Fehlerabschätzungen.

Satz 1. Es sei $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq a$, $f \in R(A)$, $\|f_\delta - f\| \leq \delta$ *und die Bedingungen (2), (3) seien mit* $\gamma_0 = 1$, $p_0 > 1$ *erfüllt. Der Regularisierungsparameter* $r = r(\delta)$ *sei gemäß Regel 1 oder Regel 2 gewählt. Dann gilt*

$$\delta r(\delta) \to 0 \; , \; u_{r(\delta)} \to u_* \quad (\delta \to 0) \; ,$$

wobei u_* *die zu* u_0 *nächste Lösung von (1) ist. Im Falle*

$$u_0 - u_* = A^p v \; , \; p > 0 \; , \; \|v\| \leq \theta$$

gelten die Abschätzungen

$$r(\delta) \leq d_p \theta^{\frac{1}{p+1}} \delta^{-\frac{1}{p+1}}$$

$$\|u_{r(\delta)} - u_*\| \leq c_p \theta^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}} \; , \; 0 < p \leq p_0 - 1 \; ,$$

wobei

$$d_p = \left(\frac{\gamma_{p+1}}{b_1 - 1}\right)^{\frac{1}{p+1}} , \; c_p = (b_2 + 1)^{\frac{p}{p+1}} + \gamma d_p \qquad \textit{(für die Regel 1)},$$

$$d_p = \left(\frac{\gamma_{p+1}}{b - 1}\right)^{\frac{1}{p+1}} \theta^{-1} , \; c_p = (b + 1)^{\frac{p}{p+1}} + \gamma d_p \qquad \textit{(für die Regel 2)}.$$

Beweis: Es gelten: $u_0 - u_* \in N(A)^{\perp}$,

(5) $\qquad u_r - u_* = (I - Ag_r(A))(u_0 - u_*) + g_r(A)(f_\delta - f)$,

(6) $\qquad Au_r - f_\delta = A(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*) - (I - Ag_r(A))(f_\delta - f)$.

Aus (6) folgt, daß

$$\|A(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\| \leq \|Au_r - f_\delta\| + \delta \; ,$$

$$\|A(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\| \geq \|Au_r - f_\delta\| - \delta \; .$$

Es sei $r = r(\delta)$ mittels der Regel 1 gewählt. Dann gilt

(7) $$\|A(I-Ag_{r(\delta)}(A))(u_0-u_*)\| \le (b_2+1)\delta ,$$

(8) $$\|A(I-Ag_{r(\delta)}(A))(u_0-u_*)\| \ge (b_1-1)\delta .$$

Aus (7) und Lemma 2 folgt, daß

$$\|(I-Ag_{r(\delta)}(A))(u_0-u_*)\| \to 0 \quad (\delta\to 0) .$$

Das war der erste Term in (5). Für den zweiten gilt

$$\|g_{r(\delta)}(A)(f_\delta-f)\| \le \gamma r(\delta)\delta .$$

Gemäß Lemma 2 von Sektion 1.6 folgt

$$r\|A(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)\| \to 0 \quad (r\to\infty)$$

(hier benutzen wir die Bedingung $p_0>1$). Zusammen mit (8) folgt hieraus, daß $\delta r(\delta)\to 0$ $(\delta\to 0)$, und damit erhalten wir auch die Konvergenz $\|u_{r(\delta)}-u_*\|\to 0$ $(\delta\to 0)$.

Sei nun $u_0-u_* = A^p v$, $0<p\le p_0-1$, $\|v\|\le\theta$. Dann ist

$$\|A(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)\| = \|A^{p+1}(I-Ag_r(A))v\| \le \gamma_{p+1}\,\theta r^{-(p+1)}$$

und (8) nimmt die Form an:

$$(b_1-1)\delta \le \gamma_{p+1}\theta[r(\delta)]^{-(p+1)} , \quad r(\delta) \le \left(\frac{\gamma_{p+1}}{b_1-1}\,\theta/\delta\right)^{\frac{1}{p+1}} ,$$

und das ist eine der Behauptungen des Satzes.

Der zweite Term in (5) besitzt die Abschätzung

$$\|g_{r(\delta)}(A)(f_\delta-f)\| \le \gamma r(\delta)\delta \le \gamma d_p\,\theta^{\frac{1}{p+1}}\,\delta^{\frac{p}{p+1}} .$$

Den ersten Term schätzen wir mit Hilfe der Momentenungleichung und (7) ab:

$$\|(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)\| = \|A^p(I-Ag_r(A))v\| \le$$

$$\le \|A^{p+1}(I-Ag_r(A))v\|^{\frac{p}{p+1}}\|(I-Ag_r(A))v\|^{\frac{1}{p+1}} \le$$

$$\le \|A(I-Ag_r(A))(u_0-u_*)\|^{\frac{p}{p+1}}\,\theta^{\frac{1}{p+1}} \underset{(7)}{\le}$$

$$\le (b_2+1)^{\frac{p}{p+1}}\,\theta^{\frac{1}{p+1}}\,\delta^{\frac{p}{p+1}} ,$$

und damit erhalten wir die Abschätzung des Satzes für $\|u_{r(\delta)}-u_*\|$ im Falle der Regel 1.

Der Fall der Regel 2 bleibt als eine Übungsaufgabe, ebenso der Fall, wenn Regel 1 oder 2 $r=0$ ergeben.

3.6 <u>Bemerkungen</u>.

1. Aus der Fehlerabschätzung des Satzes 1 folgt, daß die Methoden (4) mit der Parameterauswahl gemäß den Regeln 1 und 2 auf den Quellenmengen $M_{p\theta u_0}$ für $0<p\le p_0-1$ quasi-optimal sind. Bei a priori Parameterauswahl $r=d(\theta/\delta)^{\frac{1}{p+1}}$ erhielten wir die Quasioptimalität auf $M_{p\theta u_0}$ für $0\le p\le p_0$. Hier sehen wir, daß das Diskrepanzprinzip für die Parameterauswahl einen Nachteil hat. Für Methoden mit $p_0=\infty$ (z.B. für Iterationsmethoden) tritt dieser Nachteil jedoch nicht auf.
2. Wir heben den folgenden Vorteil des Diskrepanzprinzips hervor: die Regeln 1 und 2 benutzen keine Information über die Lösung. Vergleiche: a priori Wahl $r=d(\theta/\delta)^{\frac{1}{p+1}}$ ist nur möglich, wenn wir p und θ kennen, d.h. wissen, zu welcher Menge $M_{p\theta u_0}$ die Lösung u_* gehört!
3. Satz 1 ist für die Lawrentiew-Methode nicht anwendbar, da in diesem Fall $p_0=1$, aber im Satz $p_0>1$ gefordert ist. Und in der Tat divergiert die Lawrentiew-Methode mit der Parameterauswahl gemäß den Regeln 1 und 2 (sie konvergiert jedoch schwach).

4. Die Methoden (4) mit Parameterauswahl

$$\|Au_r - f_\delta\| = \delta ,$$

divergieren (sogar im Falle $N(A)=\{0\}$), siehe [28] oder [33].

3.7 <u>Der Fall nichtselbstadjungierter Operatoren</u>

(1) $Au = f$, $A \in L(H,F)$, $\|A\|^2 \le a$, H,F-Hilberträume,

(1') $A^*Au = A^*f_\delta$,

(4') $u_r = (I-A^*Ag_r(A^*A))u_0 + g_r(A^*A)A^*f_\delta$, $\|f_\delta - f\| \le \delta$.

<u>*Satz 1'*</u>. *Sei* $A\in L(H,F)$, $\|A\|^2 \le a$, $f\in R(A)$, $\|f_\delta - f\| \le \delta$ *und es seien (2) und (3) mit* $\gamma_0=1$, $p_0>\frac{1}{2}$ *erfüllt. Der Regularisierungsparameter* $r=r(\delta)$ *sei gemäß den Regeln 1 oder 2 gewählt. Dann gilt*

$$\delta^2 r(\delta) \to 0 , \quad u_{r(\delta)} \to u_* \quad (\delta\to 0) ,$$

wobei u_* *die zu* u_0 *nächste Lösung von (1) ist.*
Im Falle

$$u_0 - u_* = |A|^p v , \quad p > 0 , \quad \|v\| \le \theta$$

gelten die Abschätzungen

$$r(\delta) \le d_p\, \theta^{\frac{2}{p+1}}\, \delta^{\frac{2}{p+1}} ,$$

$$\|u_{r(\delta)} - u_*\| \le c_p\, \theta^{\frac{1}{p+1}}\, \delta^{\frac{p}{p+1}} , \quad 0 < p \le 2p_0 - 1 ,$$

wobei

$$d_p = \left(\frac{\gamma(p+1)/2}{b_1-1}\right)^{\frac{2}{p+1}} , \quad c_p = (b_2+1)^{\frac{p}{p+1}} + \gamma_* d_p^{1/2} \qquad \textit{(Regel 1)} ,$$

$$d_p = \left(\frac{\gamma(p+1)/2}{b-1}\right)^{\frac{2}{p+1}} \theta^{-1} , \quad c_p = (b+1)^{\frac{p}{p+1}} + \gamma_* d_p^{1/2} \qquad \textit{(Regel 2)} ,$$

$$\gamma_* = \sup_{r>0} r^{-1/2} \sup_{0\le\lambda\le a} \lambda^{1/2} |g_r(\lambda)| .$$

<u>Beweis:</u> [27] oder [33].
Dieser Satz ist auch für die Tichonowsche Methode anwendbar (da nun nur $p_0>\frac{1}{2}$ gefordert ist); diese Methode ist quasioptimal auf $M_{p\theta}$ für $0<p\le 1$.

Im Gegensatz zu (4) konvergieren die Methoden (4') mit der Parameterauswahl (Sektion 4)

$$\|Au_r - f_\delta\| = \delta .$$

4. KRITISCHES NIVEAU DER DISKREPANZ

4.1 Aufgabenstellung (etwas abgeändert):

(1) $Au = f$, $A \in L(H,F)$, $||A||^2 \leq a$, H,F-Hilberträume;

(2) $u_r = (I - A^*Ag_r(A^*A))u_0 + g_r(A^*A)A^*f_\delta$, $||f_\delta - f|| \leq \delta$,

$$g_r : [0,a] \to \mathbb{R} \quad \text{Borel-meßbar, } r > 0 ,$$

(3) $g_r(\lambda) \geq 0$, $0 \leq 1 - \lambda g_r(\lambda) \leq \frac{g_r(\lambda)}{\kappa_r}$ $(0 \leq \lambda \leq a)$, $\kappa_r := \sup_{0 \leq \lambda \leq a} g_r(\lambda)$,

(4) $\beta r \leq \kappa_r \leq \gamma r$, $r > 0$, $\beta = \text{const} > 0$, $\gamma = \text{const}$.

Die Parameterauswahl $r = r(\delta)$ geschieht auf dem Diskrepanzniveau $||Au_r - f_\delta|| = \delta$; bei Iterationsverfahren bleibt das Verfahren stehen bis zu demjenigen $n = n(\delta)$, für das zum ersten Mal $||Au_n - f_\delta|| \leq \delta$ ist.

Bemerkung. Aus (3) und (4) folgt, daß

$$0 \leq 1 - \lambda g_r(\lambda) \leq 1 ,$$

$$0 \leq \lambda(1 - \lambda g_r(\lambda)) \leq \frac{\lambda g_r(\lambda)}{\kappa_r} \leq \frac{1}{\kappa_r} \leq \beta^{-1} r^{-1}$$

und damit

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq a} \lambda^p |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leq \beta^{-p} r^{-p} \quad (0 \leq p \leq 1) ;$$

vgl. die Bedingungen an g_r in den Abschnitten 1-3.

4.2 Beispiele der Methoden (2), die den Bedingungen (3), (4) genügen:

a) Tichonowsche Methode $u_r = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*f_\delta$, $\alpha = \frac{1}{r}$:

$$g_r(\lambda) = \frac{1}{r^{-1} + \lambda} , \quad a = \infty , \quad \kappa_r = r^{-1} \quad (\beta = \lambda = 1) ,$$

$$1 - \lambda g_r(\lambda) = r^{-1} g_r(\lambda) \quad \text{(Gleichheit in (3)!)} .$$

b) Iterierte Tichonowsche Methode.

c) Spektralmethode mit $g_r(\lambda) = \begin{cases} r , & 0 \leq \lambda < \frac{1}{r} , \\ \frac{1}{\lambda} , & \lambda \geq \frac{1}{r} . \end{cases}$

d) Stetige Version des Iterationsverfahrens $(r = t \geq 0)$:

$$u'(t) + A^*Au(t) = A^*f_\delta , \quad u(o) = u_o .$$

e) Implizite Iterationsverfahren $(r = n \geq 0)$:

$$\alpha u_n + A^*Au_n = \alpha u_{n-1} + A^*f_\delta , \quad n = 1,2,\ldots \quad (\alpha = \text{const} > 0) .$$

f) Explizite Iterationsverfahren (Landweber-Friedman Iterationen):

$$u_n = u_{n-1} - \mu A^*(Au_{n-1} - f_\delta) , \quad n = 1,2,\ldots \quad (0 < \mu \leq \tfrac{1}{a}) .$$

Man beachte die geänderte Beschränkung für μ (früher $0 < \mu \leq \frac{2}{a}$).

g) Die Klasse der Iterationsverfahren:

$$u_n = u_{n-1} - g(A^*A)A^*(Au_{n-1} - f_\delta) , \quad n = 1,2,\ldots ,$$

wo $g : [0,a] \to \mathbb{R}$ eine Borel-meßbare Funktion ist,

$$0 \leq 1 - \lambda g(\lambda) \leq \frac{g(\lambda)}{\kappa} \quad (0 \leq \lambda \leq a) , \quad \kappa := \sup_{0 \leq \lambda \leq a} g(\lambda) < \infty .$$

Für eine ausführliche Darstellung siehe [28] oder [33].

4.3 Eine wichtige Ungleichung.

Lemma 1. Für die Näherung (2) und jedes $u \in H$ gilt die Ungleichung

$$(5) \quad \begin{aligned} &||u_r - u||^2 + \kappa_r(||Au_r - f_\delta||^2 - ||Au - f_\delta||^2) \leq \\ &\leq ((I - A^*Ag_r(A^*A))(u_0 - u) , u_0 - u) \quad (r > 0) . \end{aligned}$$

Beweis. Wir haben

$$u_r-u = (I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u) + g_r(A^*A)A^*(f_\delta-Au)$$

und damit

$$\|u_r-u\|^2 =$$

$$= ((I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u)\ ,\ (I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u)) +$$

$$+ 2\mathrm{Re}((I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u)\ ,\ g_r(A^*A)A^*(f_\delta-Au) +$$

$$+ (g_r(A^*A)A^*(f_\delta-Au)\ ,\ g_r(A^*A)A^*(f_\delta-Au)) =$$

$$= ((I-A^*Ag_r(A^*A))^2(u_0-u)\ ,\ u_0-u) +$$

$$+ 2\mathrm{Re}(Ag_r(A^*A)(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u)\ ,\ f_\delta-Au) +$$

$$+ (AA^*g_r(AA^*)g_r(AA^*)(f_\delta-Au)\ ,\ f_\delta-Au)\ .$$

Wir zerlegen Au_0-f_δ in die Summe von $A(u_0-u)$ und $Au-f_\delta$ und schreiben eine Hilfsgleichung:

$$(g_r(AA^*)(I-AA^*g_r(AA^*))(Au_0-f_\delta)\ ,\ Au_0-f_\delta) =$$

$$= (g_r(AA^*)(I-AA^*g_r(AA^*))A(u_0-u)\ ,\ A(u_0-u)) +$$

$$+ 2\mathrm{Re}(g_r(AA^*)(I-AA^*g_r(AA^*))A(u_0-u)\ ,\ Au-f_\delta) +$$

$$+ (g_r(AA^*)(I-AA^*g_r(AA^*))(Au-f_\delta)\ ,\ Au-f_\delta) =$$

$$= (A^*Ag_r(A^*A)(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u)\ ,\ u_0-u) +$$

$$+ 2\mathrm{Re}(Ag_r(A^*A)(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u)\ ,\ Au-f_\delta) +$$

$$+ (g_r(AA^*)(I-AA^*g_r(AA^*))(f_\delta-Au)\ ,\ f_\delta-Au).$$

Man beachte die Reihenfolge der Operatoren A und A^*!
Wir haben mehrmals die Gleichung $A^*g(AA^*) = g(A^*A)A^*$ benutzt. Nun summieren wir die erhaltenen Gleichungen gliedweise:

$$\|u_r-u\|^2 + (g_r(AA^*)(I-AA^*g_r(AA^*))(Au_0-f_\delta)\ ,\ Au_0-f_\delta) =$$

$$= ((I-A^*Ag_r(A^*A))(u_0-u)\ ,\ u_0-u) + (g_r(AA^*)(f_\delta-Au)\ ,\ f_\delta-Au)\ .$$

Um (5) zu erhalten, bleibt zu bemerken, daß

$$(g_r(AA^*)(f_\delta-Au)\ ,\ f_\delta-Au) \le \kappa_r\|f_\delta-Au\|^2\ ,$$

$$(g_r(AA^*)(I-AA^*g_r(AA^*))(Au_0-f_\delta)\ ,\ Au_0-f_\delta) \ge \kappa_r\|Au_r-f_\delta\|^2\ .$$

Die erste Ungleichung ist klar, weil $\|g_r(AA^*)\| \le \sup_{0\le\lambda\le a}|g_r(\lambda)| = \kappa_r$.

Die zweite folgt aus der Ungleichung (benutze (3)!)

$$g_r(\lambda)(1-\lambda g_r(\lambda)) \ge \kappa_r(1-\lambda g_r(\lambda))^2\ ,$$

weil dann eine analoge Ungleichung auch für Operatoren gilt

$$(g_r(AA^*)(I-AA^*g_r(AA^*))(Au_0-f_\delta)\ ,\ Au_0-f_\delta) \ge$$

$$\ge \kappa_r((I-AA^*g_r(AA^*))^2(Au_0-f_\delta)\ ,\ Au_0-f_\delta) =$$

$$= \kappa_r\|(I-AA^*g_r(AA^*))(Au_0-f_\delta)\|^2 =$$

$$= \kappa_r\|Au_r-f_\delta\|^2$$

(wir haben $Au_r-f_\delta = (I-AA^*g_r(AA^*))(Au_0-f_\delta)$ benutzt.)

Für die Tichonowsche Methode und Landweber Iterationen wurde das Lemma 1 in [2] formuliert, allgemeiner Fall in [28].

4.4 Ist das Niveau $\|Au_r-f_\delta\| = \delta$ erreichbar?

Nach Satz 2, Sektion 1, gilt $Au_r \to Qf_\delta$ $(r\to\infty)$, wobei Q der Orthoprojektor zu $\overline{R(A)} \subseteq F$ ist. Sei $f \in R(A)$, dann folgt

$$\|Au_r-f_\delta\| \to \|Qf_\delta-f_\delta\| = \inf_{u\in H}\|Au-f_\delta\| \le \|Au_*-f_\delta\| =$$

$$= \|f-f_\delta\| \le \delta\ .$$

Ist $N(A^*) = \{0\}$ und damit $\overline{R(A)} = F$, so gilt

$$\lim_{r\to\infty}\|Au_r-f_\delta\| = 0\ .$$

Ist $N(A^*) \neq \{0\}$, so kann

$$\lim_{r\to\infty} \|Au_r - f_\delta\| = \delta$$

auftreten, und dann ist es möglich, daß $\|Au_r-f_\delta\|>\delta$ für alle (endlichen) r. In diesem Fall ist $\|Qf_\delta-f_\delta\| = \delta$.
eil Qf_δ das nächste Element zu f_δ in $\overline{R(A)}$ ist und $f \in R(A)$ mit $\|f-f_\delta\|\le\delta$ auch ein Element in $\overline{R(A)}$ ist, muß $Qf_\delta=f$ sein. Weil $A^*Q=A^*$, nimmt die Näherung (2) in diesem Fall die Form an:

$$u_r = (I-A^*Ag_r(AA^*))u_o + g_r(A^*A)A^*f ,$$

und es folgt $u_r \to u_*$, wenn $r\to\infty$ (Satz 2, Sektion 1).

Zusammenfassung: in speziellen Fällen kann das Diskrepanzniveau $\|Au_r-f_\delta\|=\delta$ für alle $r>0$ unerreichbar sein, aber dann konvergiert die Methode (2) für $r\to\infty$ auch bei gestörten Daten gegen die Lösung von (1). Das Diskrepanzprinzip $\|Au_r-f_\delta\|=\delta$ ergibt in diesem Fall $r(\delta)=\infty$, $u_{r(\delta)}=u_*$.

4.5 Konvergenz und Konvergenzgeschwindigkeit.

Satz 1. Sei $A \in L(H,F)$, $\|A\|^2 \le a$, $f \in R(A)$, $\|f_\delta-f\|\le\delta$ *und die Bedingungen (3) und (4) seien erfüllt. Wir wählen* $r=r(\delta)$ *so aus, daß* $\|Au_r-f_\delta\| = \delta$, *wobei* u_r *in (2) definiert ist. Dann konvergiert*

$$u_{r(\delta)} \to u_* , \text{ wenn } \delta \to 0 ,$$

wobei u_* *die zu* u_o *nächste Lösung von (1) ist. Im Fall* $u_o-u_*=|A|^p v$, $\|v\|\le\theta$, *gilt die Fehlerabschätzung*

$$(6) \quad \|u_{r(\delta)}-u_*\| \le 2^{\frac{p}{p+1}} \theta^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}} , \quad 0 < p \le 1 .$$

Beweis. Weil $\|Au_{r(\delta)}-f_\delta\| = \delta$, $\|Au_*-f_\delta\|\le\delta$ gilt, folgt aus (5) für $u=u_*$, $r=r(\delta)$ die Abschätzung

$$(7) \quad \|u_r-u_*\|^2 \le ((I-A^*Ag_r(A^*A))(u_o-u_*) , u_o-u_*) .$$

Für die Konvergenz $u_{r(\delta)}\to u_*$ $(\delta\to 0)$ genügt es nun zu zeigen, daß

$$(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_o-u_*) \to 0 \quad (\delta\to 0) ,$$

oder (siehe Lemma 2, Sektion 3)

$$A^*A(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_o-u_*) \to 0 \quad (\delta\to 0) ,$$

oder

$$A(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_o-u_*) \to 0 \quad (\delta\to 0) .$$

Weil

$$Au_r-f_\delta = A(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_o-u_*) - (I-AA^*g_r(AA^*))(f_\delta-f) ,$$

so gilt für $r=r(\delta)$

$$\|A(I-A^*Ag_r(A^*A))(u_o-u_*)\| \le \|Au_r-f_\delta\| + \|I-AA^*g_r(AA^*)\|\delta \le 2\delta \to 0 \quad (\delta\to 0) .$$

Sei nun $u_o-u_*=|A|^p v$, $\|v\|\le\theta$, $0<p\le 1$. Die Abschätzung (7) nimmt die Form an

$$\|u_r-u_*\| \le \|K_r^{1/2}|A|^p v\| , \quad K_r = I-A^*Ag_r(A^*A) .$$

Aus (3) folgt, daß $K_r=K_r^*\ge 0$,

$$(K_r^{1/2}|A|^p)^* = K_r^{1/2}|A|^p \ge 0 .$$

Benutzen wir für $B=K_r^{1/2}|A|^p$ die Momentenungleichung, so folgt:

$$\|u_r-u_*\| \le \|K_r^{\frac{p+1}{2p}}|A|^{p+1}v\|^{\frac{p}{p+1}}\|v\|^{\frac{1}{p+1}} \le$$

$$\le \|K_r|A|^{p+1}v\|^{\frac{p}{p+1}} \theta^{\frac{1}{p+1}}$$

(wir beachten, daß $\frac{p+1}{2p} \geq 1$ für $0<p\leq 1$ und daß $\|K_r\| \leq 1$).
Damit erhalten wir (6):

$$\|u_r-u_*\| \leq \|AK_r(u_0-u_*)\|^{\frac{p}{p+1}}\,\theta^{\frac{1}{p+1}} \leq (2\delta)^{\frac{p}{p+1}}\theta^{\frac{1}{p+1}} .$$

4.6 <u>Bemerkungen</u>.

1. Es gibt keine Abschätzungen für $r(\delta)$, wenn $r=r(\delta)$ gemäß der Bedingung $\|Au_r-f_\delta\|=\delta$ gewählt wird.

2. Die Methoden (2) mit Parameterauswahl gemäß der Bedingung $\|Au_r-f_\delta\|=\delta$ sind quasioptimal auf $M_{p\theta u_0}$ $(0<p\leq 1)$; die Quasioptimalitätskonstante ist $2^{\frac{p}{p+1}}$ (siehe (6)).

3. Ist die Bedingung

$$\sup_{0\leq\lambda\leq a} \lambda^p(1-\lambda g_r(\lambda)) \leq \gamma_p r^{-p} \quad (0 \leq p \leq p_0)$$

mit einem $p_0>1$ erfüllt, so kann man quasioptimale Abschätzungen auf $M_{p\theta u_0}$ auch für $1\leq p\leq p_0$ erhalten:

$$\|u_{r(\delta)}-u_*\| \leq c_p\, \theta^{\frac{1}{p+1}}\,\delta^{\frac{p}{p+1}} ,$$

wobei c_p die Lösung der Gleichung

$$c = 2^{\frac{p}{p+1}} + \gamma_*\gamma_p^{\frac{1}{2p}}\, c^{-\frac{1}{p}} \quad (\gamma_* \text{wie in Sekt. 2, 3})$$

ist (siehe [28] oder [33]); offen bleibt Fall $p_0<p\leq 2p_0-1$.

4. Stoppen wir die Iterationen (Beispiel g)) mit dem ersten $n=n(\delta)$, für das $\|Au_n-f_\delta\|\leq\delta$. Dann gelten für $u_*\in M_{p\theta u_0}$ die Fehlerabschätzungen

$$\|u_{n(\delta)}-u_*\| \leq 2^{\frac{p}{p+1}}\,\theta^{\frac{1}{p+1}}\,\delta^{\frac{p}{p+1}} + \kappa'\delta \quad (0< p \leq 1) ,$$

$$\|u_{n(\delta)}-u_*\| \leq c_p\, \theta^{\frac{1}{p+1}}\,\delta^{\frac{p}{p+1}} \quad (1< p < \infty) ,$$

wobei $\kappa' = \sup_{0\leq\lambda\leq a} \lambda^{1/2}g(\lambda)$. Falls $\|Au_n-f_\delta\|\leq\delta$ nicht früher auftritt, kann man mit $n \asymp \delta^{-2}$ stoppen - die Konvergenzabschätzungen bleiben gültig.

Das Diskrepanzprinzip stammt aus Arbeiten von Ivanov [7] und Morozov [17]. Dabei wurde für die Tichonowsche Methode das kritische Diskrepanzniveau $\|Au_r-f_\delta\|=\delta$ benutzt.

5. DISKRETISIERUNG UND REGULARISIERUNG

5.1 Aufgabenstellung. Wir betrachten wieder die Aufgabe

(1) $Au = f$, $A \in L(H,F)$, $\|A\|^2 \le a$, H,F-Hilberträume.

Anstatt f sei ein f_δ mit $\|f_\delta - f\| \le \delta$ gegeben.

Es sei eine Familie von Borel-meßbarer Funktionen $g_r : [0,a] \to \mathbb{R}$, $r > 0$, gegeben, wobei wieder

(2) $\sup\limits_{0\le\lambda\le a} |g_r(\lambda)| \le \gamma r$, $r > 0$, $\gamma = \text{const}$,

(3) $\sup\limits_{0\le\lambda\le a} \lambda^p |1-\lambda g_r(\lambda)| \le \gamma_p r^{-p}$, $r > 0$, $0 \le p \le p_0$, $\gamma_p = \text{const}$.

Die Näherungslösung zu (1) wird nun durch die Formel

(4) $u_{rh} = (I - A_h^* A_h g_r(A_h^* A_h)) P_h u_0 + g_r(A_h^* A_h) A_h^* f_\delta$

konstruiert, wobei

$$A_h = Q_h A P_h \quad (\text{damit } A_h^* = P_h A^* Q_h)$$

und $P_h \in L(H,H)$ und $Q_h \in L(F,F)$ endlichdimensionale Orthoprojektoren sind. Im Folgenden wird es vorausgesetzt, daß

(5) $\xi_h := \|A(I-P_h)\| \to 0$, $\eta_h := \|(I-Q_h)A\| \to 0$, für $h \to 0$.

Eine notwendige Bedingung dafür ist die Kompaktheit des Operators A; hinreichende Bedingungen zu (5) sind die Kompaktheit von A und die punktweise Konvergenz $P_h \to I$, $Q_h \to I$ $(h \to 0)$.

Es ist möglich spezielle Projektionsmethoden zu konstruieren, so daß schon die Diskretisierung der Aufgabe (1) als Regularisierung wirkt. Diese interessante Frage bleibt im Folgenden jedoch unberührt. Siehe [18, 36, 6, 32]. Über Diskretisierung mit einer zusätzlichen Regularisierung siehe auch [8, 35].

5.2 Beispiele. Die Tichonowsche Methode nimmt nun die Form an:

(6) $$(r^{-1} I + P_h A^* Q_h A P_h) u_{rh} = P_h A^* Q_h f_\delta \;;$$

die expliziten und impliziten Iterationsverfahren nehmen die Form an:

(7) $$u_{n,h} = u_{n-1,h} - \mu(P_h A^* Q_h A P_h u_{n-1,h} - P_h A^* Q_h f_\delta) \,,$$
$$n = 1,2,\ldots \,, \quad u_{0,h} = P_h u_0 \,, \quad 0 < \mu < \tfrac{2}{a} \,,$$

und

(8) $$(\alpha I + P_h A^* Q_h A P_h) u_{n,h} = \alpha u_{n-1,h} + P_h A^* Q_h f_\delta \,,$$
$$n = 1,2,\ldots \,, \quad u_{0,h} = P_h u_0 \,, \quad \alpha > 0 \,.$$

Es seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell$ und $\psi_1, \ldots, \psi_m$ die Basen von $P_h H$ und $Q_h F$ ($\ell = \dim P_h H$, $m = \dim Q_h F$). Führt man die Bezeichnungen ein:

$$G_\varphi = (\varphi_{j'}, \varphi_j)_{j,j'=1}^{\ell}$$

$$G_\psi = (\psi_{i'}, \psi_i)_{i,i'=1}^{m} \,,$$

$$B = (A\varphi_j, \psi_i)_{i,j=1}^{m,\ell} \,,$$

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} (f_\delta, \psi_1) \\ \vdots \\ (f_\delta, \psi_m) \end{pmatrix},$$

so erhält man die folgende Matrix-Darstellung der Tichonowschen Methode (6):

(6') $$u_{rh} = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \varphi_j \,, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_\ell \end{pmatrix},$$

$$r^{-1} G_\varphi \underline{c} + B^T G_\psi^{-1} B \underline{c} = B^T G_\psi^{-1} \underline{f} \,.$$

Die Matrix-Darstellungen der Iterationsverfahren (7) und (8) sind die folgenden:

$$(7') \quad G_\varphi \underline{c}^n = G_\varphi \underline{c}^{n-1} - \mu(B^T G_\Psi^{-1} B \underline{c}^{n-1} - B^T G_\Psi^{-1} \underline{f}) \ , \ n=1,2,\ldots$$

und

$$(8') \quad \alpha G_\varphi \underline{c}^n + B^T G_\Psi^{-1} B \underline{c}^n = \alpha G_\varphi \underline{c}^{n-1} + B^T G_\Psi^{-1} \underline{f} \ , \ n=1,2,\ldots \ ,$$

wobei

$$u_{n,h} = \sum_{j=1}^{\ell} c_j^n \varphi_j \ , \quad \underline{c}^n = \begin{pmatrix} c_1^n \\ \vdots \\ c_\ell^n \end{pmatrix} \ , \quad \underline{c}^o = G_\varphi^{-1} \begin{pmatrix} (u_o,\varphi_1) \\ \vdots \\ (u_o,\varphi_\ell) \end{pmatrix} \ .$$

5.3 <u>Eine Konkretisierung der Beispiele</u>. Wir illustrieren die Methoden von Sektion 5.2 an der Integralgleichung erster Art

$$(Au)(t) := \int_a^b K(t,s)u(s)ds = f(t) \quad (c \le t \le d) \ .$$

Konkretisieren wir die Räume:

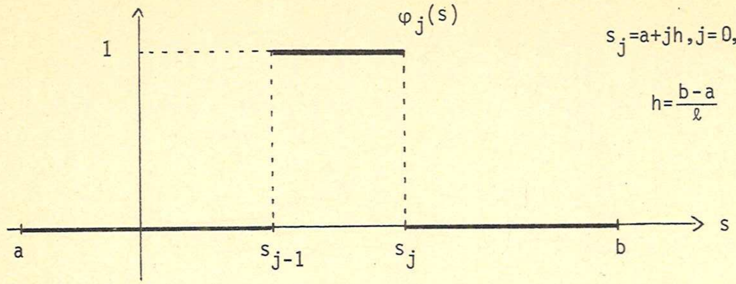
$$H = L_2(a,b) \ , \ (u,v)_H = \int_a^b u(s)v(s)ds \ ,$$

$$F = L_2(c,d) \ , \ (f,g)_F = \int_c^d f(t)g(t)dt \ ,$$

$$H_h := P_h H = \mathrm{SPAN}\{\varphi_1,\ldots,\varphi_\ell\} \subset H \ ,$$

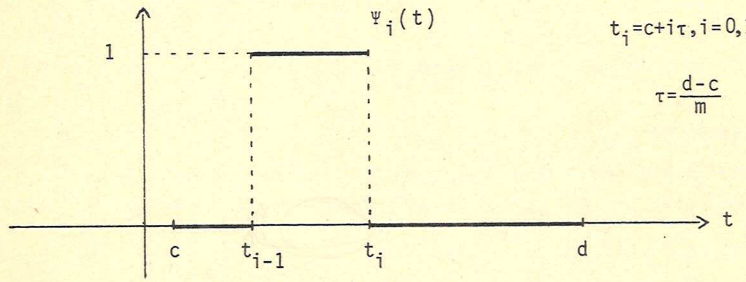
$$F_h := Q_h F = \mathrm{SPAN}\{\Psi_1,\ldots,\Psi_m\} \subset F \ ,$$

wobei $\varphi_1,\ldots,\varphi_\ell$ und $\Psi_1,\ldots,\Psi_m$ stückweise konstante Funktionen sind (siehe die Zeichnungen):



$s_j = a+jh, j=0,1,\ldots,\ell$

$h = \frac{b-a}{\ell}$



$t_i = c+i\tau, i=0,1,\ldots,m$

$\tau = \frac{d-c}{m}$

Dann gilt:

$$G_\varphi = hI_\ell \ , \quad G_\Psi = \tau I_m \ , \quad B = (b_{ij}) \ , \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \ ,$$

wobei I_ℓ die Einheitsmatrix der Ordnung ℓ ist,

$$b_{ij} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} K(t,s)dsdt \quad (i=1,\ldots,m \ ; \ j=1,\ldots,\ell) \ .$$

$$f_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f_\delta(t)dt \quad (i=1,\ldots,m) \ .$$

Die Tichonowsche Methode (6') nimmt die Form an (mit den Bezeichnungen $\alpha=1/r$, $u_j=c_j$)

$$u_{\alpha h} = \sum_{j=1}^{\ell} u_j\varphi_j \ , \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1\\ \vdots \\ u_\ell\end{pmatrix} ,$$

$$\alpha h\underline{u} + \frac{1}{\tau}B^TB\underline{u} = \frac{1}{\tau}B^T\underline{f} \ , \quad \text{oder}$$

$$\alpha\underline{u} + \frac{1}{h\tau}B^TB\underline{u} = \frac{1}{h\tau}B^T\underline{f} \ .$$

Wenn man die Approximationen

$$b_{ij} \approx h\tau K(t_{i-\frac{1}{2}}, s_{j-\frac{1}{2}}) \ , \quad f_i \approx \tau f_\delta(t_{i-\frac{1}{2}}) \ ,$$

benutzt, so nimmt das letzte Tichonow-System die Form an

$$\alpha\underline{u} + h\tau K^TK\underline{u} = \tau K^T\underline{g} \ ,$$

$$K = (K(t_{i-\frac{1}{2}}, s_{j-\frac{1}{2}}))_{i,j=1}^{m,\ell} \ , \quad \underline{g} = \begin{pmatrix} f_\delta(t_{1/2})\\ \vdots\\ f_\delta(t_{m-\frac{1}{2}})\end{pmatrix} .$$

Dieses System kann man auch betrachten als das System, das man erhält, falls man die Tichonwosche Gleichung $\alpha u + A^*Au = A^*f_\delta$, d.h. die Gleichung

$$\alpha u(s) + \int_a^b \left[\int_c^d K(t,s)K(t,s')dt\right] u(s')ds' = \int_c^d K(t,s)f_\delta(t)dt$$

mittels Quadraturformeln diskretisiert. Doch ist das erhaltene System kein "reines" Projektionssystem und man müßte die folgenden Betrachtungen (Sektionen 5.5-5.8) überprüfen für "gestörte" Projektionsmethoden.

In diesem Beispiel gilt für genügend glatte Kerne K(t,s)

$$\xi_h = \|A(I-P_h)\| = \|(I-P_h)A^*\| \le c_1 h \ , \quad c_1 = \frac{1}{2}\|A_1\|_{L_2\to L_2} \ ,$$

$$\eta_h = \|(I-Q_h)A\| \le c_2\tau \ , \quad c_2 = \frac{1}{2}\|A_2\|_{L_2\to L_2} \ ,$$

wobei

$$(A_1f)(s) = \int_c^d \frac{\partial K(t,s)}{\partial s} f(t)dt \quad (a\le s\le b) \ ,$$

$$(A_2u)(t) = \int_a^b \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} u(s)dt \quad (c\le t\le d) \ .$$

Analog konkretisieren sich die Iterationsmethoden (7') und (8').

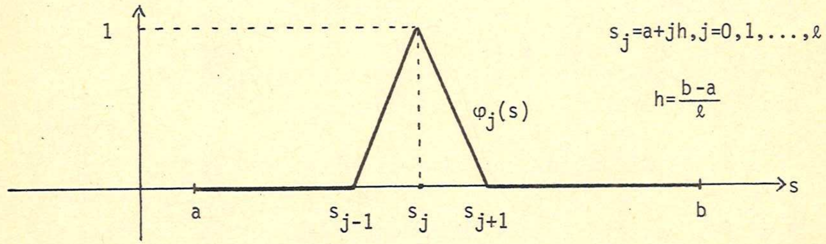
5.4 Eine weitere Konkretisierung. Sei nun

$H=W_2^1(a,b)$ (Sobolew-Raum), $(u,v)_H = \int_a^b [u(s)v(s)+u'(s)v'(s)]ds$,

$F = L_2(c,d)$, $F_h \subset F$ wie in Sektion 5.3 ,

$H_h = \mathrm{SPAN}\{\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n\} \subset H$,

wobei $\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n$ die linearen B-Splinefunktionen sind:



Dann gilt:

$$G_\Psi = \tau I_m \quad (I_m\text{-Einheitsmatrix der Ordnung } m) \ ,$$

$$G_\varphi = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{h}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jetzt kann man die Systeme (6')-(8') konkretisieren. Meistens benutzt man dabei die Approximationen

$$(f_\delta,\psi_i) \approx \tau f_\delta(t_{i-\frac{1}{2}}) \ ,$$

$$(A\varphi_j,\psi_i) \approx \sigma_j\tau h K(t_{i-\frac{1}{2}}, s_j) \ , \quad \sigma_j = \begin{cases} 1/2 & \text{für } j=0 \text{ und } j=\ell \ , \\ 1 & \text{für } j=1,\dots,\ell-1 \ . \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste und die letzte Gleichung von (6') mit 2/h und die übrigen Gleichungen mit 1/h, so erhalten wir das System ($c_j =: u_j \approx u(jh)$; $\alpha = 1/r$)

$$\alpha\left[-\frac{u_{j-1}-2u_j+u_{j+1}}{h^2}+\frac{u_{j-1}+4u_j+u_{j+1}}{6}\right]+$$

$$+\ h\sum_{j'=0}^{\ell}\sigma_{j'}\left[\tau\sum_{i=1}^{m}K(t_{i-\frac{1}{2}},s_j)\,K(t_{i-\frac{1}{2}},s_{j'})\right]u_{j'}=$$

$$=\tau\sum_{i=1}^{m}K(t_{i-\frac{1}{2}},s_j)\,f_\delta(t_{i-\frac{1}{2}})\ ,\quad j=0,1,\dots,\ell\ ,$$

$$u_{-1}=u_1\ ,\quad u_{\ell+1}=u_{\ell-1}\ .$$

Man erkennt hier eine Differenz-Quadratur-Approximation der Aufgabe

$$\alpha\left[-u''(s)+u(s)\right]+\int_a^b\left[\int_c^d K(t,s)K(t,s')dt\right]u(s')ds'=$$

$$=\int_c^d K(t,s)f_\delta(t)dt\ ,\quad a\le s\le b\ ,\quad u'(a)=u'(b)=0\ .$$

Übrigens ist die letzte Randwertaufgabe genau die Tichonowsche Methode mit $H=W_2^1(a,b)$, $F=L_2(c,d)$ wie oben, aber ohne Diskretisierung (eine gute Übungsaufgabe), weil in diesen Räumen gilt

$$A^*=J^{-1}A^T\ ,\quad (A^Tf)(s)=\int_c^d K(t,s)f(t)dt\quad (f\in L_2)\ ,$$

$$Ju=-u''+u\ ,\quad D(J)=\{u\in W_2^2(a,b)\ :\ u'(a)=u'(b)=0\}\ .$$

In diesem Beispiel ist

$$\xi_h=\|A(I-P_h)\|=\|(I-P_h)A^*\|\le c_1h\ ,\quad c_1=\tfrac{1}{2}\|A^T\|_{L_2\to L_2}\ ,$$

$$\eta_h=\|(I-Q_h)A\|\le c_2\tau\ ,\quad c_2=\tfrac{1}{2}\|A_1\|_{W_2^1\to L_2}\ ,$$

$$(A_1u)(t)=\int_a^b\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\,u(s)ds$$

(hier nehmen wir an, daß $\partial K(t,s)/\partial t$ existiert und einen beschränkten Operator $A_1 : W_2^1 \to L_2$ definiert).

Analog lassen sich die Methoden (7') und (8') konkretisieren.

5.5 A priori Parameterauswahl.

Satz 1. Es sei $A\in L(H,F)$, $\|A\|^2\le a$, $f\in R(A)$, $\|f_\delta-f\|\le\delta$. *Die Bedingungen* (2), (3) *und* (5) *seien erfüllt und es konvergiere* $P_h\to I$ $(h\to 0)$ *punktweise. Der Regularisierungsparameter* $r=r(\delta,h)$ *sei in* (4) *so ausgewählt, daß*

$$r(\delta,h)\to\infty\ ,\quad \delta^2r(\delta,h)\to 0\ ,\quad \xi_h^2r(\delta,h)\le\mathrm{const}\quad(\delta\to 0,h\to 0).$$

Dann gilt $u_{r(\delta,h)}\to u_*$ $(\delta\to 0, h\to 0)$, *wobei* u_* *die zu* u_0 *nächste Lösung von* (1) *ist.*

Im Falle

$$u_0-u_*=|A|^pv\ ,\quad u_0=|A|^pv_0\ ,$$

wählen wir

$$r=\min\left\{d_1\delta^{-\frac{2}{p+1}}\ ,\ d_2\,\xi_h^{-2}\right\}$$

oder

$$r=\min\left\{d_1\delta^{-\frac{2}{p+1}}\ ,\ d_2(\xi_h+\eta_h)^{-2}\right\}\ ,\quad d_1,d_2=\mathrm{const}>0\ .$$

Es gilt die Fehlerabschätzung

$$(9)\qquad \|u_{rh}-u_*\|\le c\left(\delta^{\frac{p}{p+1}}+\xi_h^{\min\{1,p\}}+\eta_h^{\min\{2,p\}}\right)\ ,\quad 0<p\le 2p_0\ .$$

Beweis. Es gilt $u_0-u_*\in N(A)^{\perp} = \overline{R(A^*)}$,

(10) $$u_{rh}-P_hu_* = (I-A_h^*A_hg_r(A_h^*A_h))P_h(u_0-u_*) + g_r(A_h^*A_h)A_h^*(Q_hf_\delta-A_hP_hu_*) \ .$$

Aus (5) folgt, daß

$$||A_h-A|| = ||Q_hAP_h-A|| \le ||Q_hA(I-P_h)|| + ||(I-Q_h)A|| \le \xi_h+\eta_h \quad (h\to 0) \ .$$

Benutzen wir die punktweise Konvergenz $P_h\to I(h\to 0)$, so ist es mit Hilfe des Satzes von Banach-Steinhaus leicht zu beweisen, daß für jedes $w\in R(A^*)$

$$(I-A_h^*A_hg_r(A_h^*A_h))P_hw \to 0 \quad (h\to 0, r\to\infty) \ .$$

Damit gilt

$$(I-A_h^*A_hg_r(A_h^*A_h))P_h(u_0-u_*) \to 0 \quad (h\to 0, r\to\infty) \ .$$

Aus (2) und (3) mit p=0 folgt, daß

$$\sup_{0\le\lambda\le a} \lambda^{1/2}|g_r(\lambda)| \le \gamma_*r^{1/2} \quad (r>0) \ , \ \gamma_* = \text{const} \ .$$

Deshalb ist

$$||g_r(A_h^*A_h)A_h^*|| = ||g_r(A_h^*A_h)(A_h^*A_h)^{1/2}|| \le \gamma_*r^{1/2} \quad (r>0) \ .$$

Weil

$$Q_hf_\delta-A_hP_hu_* = Q_h(f_\delta-f) + Q_hA(I-P_h)u_* \ , \ I-P_h = (I-P_h)^2 \ ,$$

und damit

$$||Q_hf_\delta-A_hP_hu_*|| \le \delta + \xi_h||(I-P_h)u_*||$$

gilt, folgt aus (10), daß

(11) $$||u_{rh}-u_*|| \le ||u_*-P_hu_*|| + ||(I-A_h^*A_hg_r(A_h^*A_h))P_h(u_0-u_*)|| + \gamma_*r^{1/2}(\delta+\xi_h||(I-P_h)u_*||) \ .$$

Hieraus folgt die Konvergenzaussage.

Sei nun $u_0-u_*=|A|^pv$, $u_0=|A|^pv_0$ und damit $u_*=|A|^pv_*$, $v_*=v_0-v$. Die Abschätzung (11) nimmt die Form an:

(11') $$||u_{rh}-u_*|| \le ||(I-P_h)|A|^pv_*|| + ||(I-A_h^*A_hg_r(A_h^*A_h))P_h|A|^pv|| + \gamma_*r^{1/2}(\delta+\xi_h||(I-P_h)|A|^pv_*||) \ .$$

Wir zeigen, daß

(12) $$||(I-P_h)|A|^p|| \le \begin{cases} \xi_h^p \ , & 0\le p\le 1 \ , \\ ||A||^{p-1}\xi_h \ , & p>1 \ . \end{cases}$$

Es gilt

$$||(I-P_h)|A|^p|| = ||[(I-P_h)|A|^p]^*|| = ||\,|A|^p(I-P_h)|| \ .$$

Für $0\le p\le 1$ schätzen wir die letzte Norm ab mit Hilfe der Momentengleichung: für jedes $u\in H$ gilt

$$||\,|A|^p(I-P_h)u|| \le ||\,|A|(I-P_h)u||^p\,||(I-P_h)u||^{1-p} = ||A(I-P_h)u||^p\,||(I-P_h)u||^{1-p} \le \xi_h^p||u|| \ .$$

Das beweist (12) für $0\le p\le 1$; der Fall $p>1$ ist eine unmittelbare Folgerung aus der Abschätzung für $p=1$.

Für $r\le\min\left\{d_1\delta^{-\frac{2}{p+1}} , d_2\xi_h^{-2}\right\}$ ist

$$r^{1/2}\delta \le d_1^{1/2}\delta^{\frac{p}{p+1}} \ , \ r^{1/2}\xi_h \le d_2^{1/2} \ ,$$

und (11') nimmt die Form (siehe (12)) an:

(11'') $$||u_{rh}-u_*|| \le ||(I-A_h^*A_hg_r(A_h^*A_h))P_h|A|^pv|| + c_1\delta^{\frac{p}{p+1}} + c_2\xi_h^{\min\{1,p\}} \ .$$

Es gilt

$$P_h|A|^p = |A_h|^p + (|AP_h|^p-|A_h|^p) + (P_h|A|^pP_h-|AP_h|^p) + P_h|A|^p(I-P_h)$$

und (siehe Sektion 5.7, Folgerung 2 und Lemma 2)

$$(13)\qquad \| |AP_h|^p - |A_h|^p \| = \| |AP_h|^p - |Q_h AP_h|^p \| \leq c_p \eta_h^{\min\{2,p\}},$$

$$(14)\qquad \| P_h |A|^p P_h - |AP_h|^p \| \leq c_p\, \xi_h^{\min\{1,p\}} .$$

Benutzen wir noch (12), so erhalten wir

$$\| (I - A_h^* A_h g_r(A_h^* A_h))\, P_h |A|^p v \| \leq$$

$$\leq \Big[\underbrace{\| (I - A_h^* A_h g_r(A_h^* A_h)) |A_h|^p \|}_{\substack{\wedge\!\backslash \\ \gamma_{p/2} r^{-p/2} \quad \text{nach (3)}}} + c_2' \xi_h^{\min\{1,p\}} + c_3 \eta_h^{\min\{2,p\}} \Big] \| v \| .$$

Für $r = \min \left\{ d_1 \delta^{-\frac{2}{p+1}} ,\ d_2 \xi_h^{-2} \right\}$ ist

$$r^{-p/2} = \max \left\{ d_1^{-p/2} \delta^{\frac{p}{p+1}} ,\ d_2^{-p/2} \xi_h^p \right\} \leq d_1^{-p/2} \delta^{\frac{p}{p+1}} + d_2^{-p/2} \xi_h^p$$

und damit

$$\| (I - A_h^* A_h g_r(A_h^* A_h)) P_h |A|^p v \| \leq c' \left(\delta^{\frac{p}{p+1}} + \xi_h^{\min\{1,p\}} + \eta_h^{\min\{2,p\}} \right) .$$

Die Fehlerabschätzung (9) folgt nun aus (11'').

5.6 Benutzung des Diskrepanzprinzips.

Die Diskrepanz $\| A_h u_{rh} - Q_h f_\delta \|$ hat die folgenden Eigenschaften (vgl. Lemma 1, Sektion 3.2):

$$\lim_{r\to 0} \| A_h u_{rh} - Q_h f_\delta \| = \| A_h P_h u_0 - Q_h f_\delta \| ;$$

$$\lim_{r\to\infty} \| A_h u_{rh} - Q_h f_\delta \| = \inf_{u\in H} \| A_h P_h u - Q_h f_\delta \| \leq \| A_h P_h u_* - Q_h f_\delta \| \leq$$
$$\leq \delta + \xi_h \| (I - P_h) u_* \| ;$$

ist $g_r(\lambda)$ stetig in r, so ist $\| A_h u_{rh} - Q_h f_\delta \|$ stetig in r; ist $|1 - \lambda g_r(\lambda)|$ fallend in r, so ist $\| A_h u_{rh} - Q_h f_\delta \|$ fallend in r.

Wir formulieren Regeln für die Parameterauswahl:

Regel 1. Wir fixieren die Konstanten $b_1 > 1$, $b_2 \geq b_1$, $d > 0$.

(a) Ist $\| A_h P_h u_0 - Q_h f_\delta \| \leq b_2 \delta$, so sei $r(\delta,h) = 0$ (und $u_{0h} = P_h u_0$);

(b) ist $\| A_h u_{rh} - Q_h f_\delta \| > b_2 \delta$ für alle $r \in \left(0, d(\xi_h + \eta_h)^{-2}\right)$, so sei $r(\delta,h) = d(\xi_h + \eta_h)^{-2}$.

(c) Sonst wählen wir ein beliebiges $r = r(\delta,h) \in \left(0, d(\xi_h + \eta_h)^{-2}\right)$, so daß

$$b_1 \delta \leq \| A_h u_{rh} - Q_h f_\delta \| \leq b_2 \delta .$$

Regel 2. Wir fixieren die Konstanten $b > 0$, $\theta \in (0,1)$, $d > 0$.

(a) Ist $\| A_h P_h u_0 - Q_h f_\delta \| \leq b\delta$, so sei $r(\delta,h) = 0$ (und $u_{0h} = P_h u_0$);

(b) ist $\| A_h u_{rh} - Q_h f_\delta \| > b\delta$ für alle $r \in \left(0, d(\xi_h + \eta_h)^{-2}\right)$, so sei $r(\delta,h) = d(\xi_h + \eta_h)^{-2}$;

(c) sonst wählen wir ein beliebiges $r = r(\delta,h) \in \left(0, d(\xi_h + \eta_h)^{-2}\right)$, so daß

$$\| A_h u_{rh} - Q_h f_\delta \| \leq b\delta \text{ und } \exists r' \in [\theta r, r]: \| A_h u_{r'} - Q_h f_\delta \| \geq b\delta .$$

Satz 2. Sei $A \in L(H,F)$, $\| A \|^2 \leq a$, $f \in R(A)$, $\| f_\delta - f \| \leq \delta$. *Die Bedingungen (2) und (3) mit* $p_0 > \frac{1}{2}$, $\gamma_0 = 1$ *und die Bedingung (5) seien erfüllt und es konvergiere* $P_h \to I$ $(h \to 0)$ *punktweise. Der Parameter* $r = r(\delta,h)$ *in der Annäherung (4) sei gemäß der Regel 1 oder Regel 2 ausgewählt. Dann*

$$\delta^2 r(\delta,h) \to 0 , \quad (\xi_h^2 + \eta_h^2) r(\delta,h) \leq d , \quad u_{r(\delta,h)} \to u_* \quad (\delta\to 0, h\to 0) ,$$

wobei u_* die nächste Lösung von (1) zu u_o ist.
Im Falle

$$u_o-u_* = |A|^p v \ , \quad u_o = |A|^p v_o$$

gelten die Abschätzungen

$$(15) \quad r(\delta,h) \le \min\left\{d_1\delta^{-\frac{2}{p+1}} \ , \ d(\xi_h+\eta_h)^{-2}\right\} \quad (0<p\le\min\{1,2p_o-1\}) \ ,$$

$$(16) \quad \| u_{r(\delta,h)}-u_*\| \le c\left(\delta^{p/(p+1)} + \xi_h^{\min\{p,1\}} + \eta_h^{\min\{p,2\}}\right)(0<p\le 2p_o-1) \ .$$

Beweis: Wie in Sektion 3.4 kann man das Folgende beweisen:

$$\| (I-A_h^*A_h g_r(A_h^*A_h))P_h(u_o-u_*)\| \to 0 \quad (\delta\to 0, h\to 0)$$

dann und nur dann, wenn

$$(17) \quad \| A_h(I-A_h^*A_h g_r(A_h^*A_h))P_h(u_o-u_*)\| \to 0 \quad (\delta\to 0, h\to 0) \ ;$$

dabei kann $r=r(\delta,h)$ ganz beliebig sein.
Es gilt

$$A_h u_{rh} - Q_h f_\delta = A_h(I-A_h^*A_h g_r(A_h^*A_h))P_h(u_o-u_*) -$$
$$- (I-A_hA_h^* g_r(A_hA_h^*))(Q_h f_\delta - A_hP_hu_*) \ .$$

Weil $\| I-A_hA_h^*g_r(A_hA_h^*)\| \le \gamma_o = 1$, erhalten wir hieraus

$$\| A_h(I-A_h^*A_h g_r(A_h^*A_h))P_h(u_o-u_*)\| \le \| A_h u_{rh} - Q_h f_\delta\| + \delta + \xi_h \| (I-P_h)u_*\|$$

$$\| A_h(I-A_h^*A_h g_r(A_h^*A_h))P_h(u_o-u_*)\| \ge \| A_h u_{rh} - Q_h f_\delta\| - \delta - \xi_h \| (I-P_h)u_*\| \ .$$

Es sei $r=r(\delta,h)$ mittels Regel 1 ausgewählt, wobei

$$\| A_hP_hu_o - Q_h f_\delta\| > b_2\delta$$

sei (Fälle (b) und (c) in Regel 1).
Dann gilt

$$(18) \quad \| A_h(I-A_h^*A_h g_{r(\delta,h)}(A_h^*A_h))P_h(u_o-u_*)\| + \xi_h \| (I-P_h)u_*\| \ge (b_1-1)\delta$$

und im Falle (c) zusätzlich

$$(18') \quad \| A_h(I-A_h^*A_h g_{r(\delta,h)}(A_h^*A_h))P_h(u_o-u_*)\| \le (b_2+1)\delta + \xi_h \| (I-P_h)u_*\| \ .$$

Im Falle (c) folgt die Erfüllung von (17) aus (18').
Im Falle (b) ist (17) auch erfüllt, da dann $r(\delta,h)=d(\xi_h+\eta_h)^{-2} \to \infty$ $(\delta\to 0, h\to 0)$. Damit ist bewiesen, daß (siehe (11))

$$\| (I-A_h^*A_h g_{r(\delta,h)}(A_h^*A_h))P_h(u_o-u_*)\| \to 0 \quad (\delta\to 0, h\to 0) \ .$$

Außerdem erhielten wir die wichtige Ungleichung (18). Multiplizieren wir sie mit $[r(\delta,h)]^{1/2}$, so erhalten wir

$$(b_1-1)\delta[r(\delta,h)]^{1/2} \le [r(\delta,h)]^{1/2} \| A_h(I-A_h^*A_h g_{r(\delta,h)}(A_h^*A_h))P_h(u_o-u_*)\| +$$
$$+ [r(\delta,h)]^{1/2} \ \xi_h \| (I-P_h)u_*\| \ .$$

Weil immer $r(\delta,h) \le d(\xi_h+\eta_h)^{-2}$, haben wir

$$[r(\delta,h)]^{1/2} \ \xi_h \| (I-P_h)u_*\| \le d^{1/2} \| (I-P_h)u_*\| \to 0 \quad (\delta\to 0, h\to 0) \ .$$

Mit Hilfe des Satzes von Banach-Steinhaus ist es leicht zu beweisen (vgl. Lemma 2, Sektion 1.6), daß

$$r^{1/2} \| A_h(I-A_h^*A_h g_r(A_h^*A_h))P_h(u_o-u_*)\| \to 0 \quad (r\to\infty, h\to 0)$$

(hier ist die Bedingung $p_o > \frac{1}{2}$ wichtig). Damit ist es bewiesen, daß

$$\delta[r(\delta,h)]^{1/2} \to 0 \quad (\delta\to 0, h\to 0) \ ,$$

$$[r(\delta,h)]^{1/2}(\delta + \xi_h \| (I-P_h)u_*\|) \to 0 \quad (\delta\to 0, h\to 0) \ .$$

Aus (11) sehen wir, daß $u_{r(\delta,h)} \to u_*$ $(\delta\to 0, \eta\to 0)$.

Nun sei $u_o-u_* = |A|^p v$, $u_o = |A|^p v_o$ $(0<p\le 2p_o-1)$ und damit $u_* = |A|^p v_*$, $v_* = v_o - v$.

Weil

$$P_h|A|^p = |A_h|^p + (|AP_h|^p - |A_h|^p) + (P_h|A|^pP_h - |AP_h|^p) + P_h|A|^p(I-P_h),$$

erhalten wir mit Hilfe von (12), (13) und (14)

$$\|A_h(I-A_h^*A_h g_r(A_h^*A_h))P_h(u_0-u_*)\| \le$$

$$\le \left[\gamma_{(p+1)/2}\, r^{-\frac{p+1}{2}} + \gamma_{1/2}\, r^{-1/2}\, c\left(\xi_h^{\min\{p,1\}} + \eta_h^{\min\{p,2\}}\right)\right]\|v\| .$$

Diese Abschätzung ersetzen wir in der Ungleichung (18), die wir vorläufig mit $[r(\delta,h)]^{1/2}$ multiplizieren:

(19) $(b_1-1)\delta[r(\delta,h)]^{1/2} \le c_1[r(\delta,h)]^{-p/2} + c_2\xi_h^{\min\{p,1\}} + c_2\eta_h^{\min\{p,2\}}$,

(beachten wir, daß $\|(I-P_h)u_*\| = \|(I-P_h)|A|^p v_*\| \le c\xi_h^{\min\{p,1\}}$ und $\xi_h[r(\delta,h)]^{1/2} \le d^{1/2}$). Ist $r(\delta,h)\ge\delta^{-\frac{2}{p+1}}$, so folgt aus (19) die Ungleichung

(20) $\delta[r(\delta,h)]^{1/2} \le c\left(\delta^{p/(p+1)} + \xi_h^{\min\{p,1\}} + \eta_h^{\min\{p,2\}}\right)$;

ist $r(\delta,h) < \delta^{-2/(p+1)}$, so ist $\delta[r(\delta,h)]^{1/2} \le \delta^{p/(p+1)}$, d.h. (20) ist wieder erfüllt. Damit ist (20) immer erfüllt, und das ermöglicht die Fehlerabschätzung (11) wieder zu der Form (11'') zu führen.

Ist $r(\delta,h) = d(\xi_h+\eta_h)^{-2}$ (Fall (b) in Regel 1) oder $r(\delta,h)\ge\delta^{-2/(p+1)}$, so können wir wie im Beweis des Satzes 5.1 zeigen, daß

(21) $\|(I-A_h^*A_h g_r(A_h^*A_h))P_h|A|^p v\| \le c'\left(\delta^{\frac{p}{p+1}} + \xi_h^{\min\{p,1\}} + \eta_h^{\min\{p,2\}}\right)$.

Komplizierter ist es, diese Ungleichung auch im Falle $r(\delta,h) < \min\left\{\delta^{-2/(p+1)},\ d(\xi_h+\eta_h)^{-2}\right\}$ zu erhalten. Zunächst bemerken wir, daß, für $0<r<r_1$, $0\le\lambda\le a$,

(22) $(1-\lambda g_r(\lambda))^2 \le \kappa\left[(1-\lambda g_{r_1}(\lambda))^2 + r_1\lambda(1-\lambda g_r(\lambda))^2\right]$.

Tatsächlich, für $0\le\lambda\le\frac{q}{\gamma r_1}$, $0<q<1$, folgt aus (2), daß

$$|\lambda g_{r_1}(\lambda)| \le q,\quad (1-\lambda g_{r_1}(\lambda))^2 \ge (1-q)^2,$$

und (22) gilt mit $\kappa = 1/(1-q)^2$. Für $\lambda\ge\frac{q}{\gamma r_1}$ ist $r_1\lambda\ge q/\gamma$, und (22) gilt mit $\kappa=\gamma/q$. Für alle $\lambda\in[0,a]$ gilt (22) dann mit $\kappa=\max\{1/(1-q)^2,\ \gamma/q\}$. Aus (22) folgt, daß, für $0<r<r_1$, $w\in H$,

$$\|(I-A_h^*A_h g_r(A_h^*A_h))w\|^2 \le$$

$$\le\kappa\left[\|(I-A_h^*A_h g_{r_1}(A_h^*A_h))w\|^2 + r_1\|A_h(I-A_h^*A_h g_r(A_h^*A_h))w\|^2\right]$$

und

$$\|(I-A_h^*A_h g_r(A_h^*A_h))w\| \le$$

$$\le\kappa^{1/2}\left[\|(I-A_h^*A_h g_{r_1}(A_h^*A_h))w\| + r_1^{1/2}\|A_h(I-A_h^*A_h g_r(A_h^*A_h))w\|\right].$$

Nun benutzen wir die letzte Ungleichung mit $r=r(\delta,h)<r_1:=\min\left\{\delta^{-2/(p+1)},\ d(\xi_h+\eta_h)^{-2}\right\}$, $w=P_h|A|^p v$:

$$\|(I-A_h^*A_h g_r(A_h^*A_h))P_h|A|^p v\|\le$$

$$\le\kappa^{1/2}\Big(\|(I-A_h^*A_h g_{r_1}(A_h^*A_h))P_h|A|^p v\| +$$

$$+\min\left\{\delta^{-1/(p+1)}, d^{1/2}(\xi_h+\eta_h)^{-1}\right\}\|A_h(I-A_h^*A_h g_r(A_h^*A_h))P_h(u_0-u_*)\|\Big)\le$$

$$\underset{(18'),(21)}{\le} c''\left(\delta^{p/(p+1)}+\xi_h^{\min\{p,1\}}+\eta_h^{\min\{p,2\}}\right).$$

(21) gilt also in jedem Fall. Aus (11'') und (21) erhalten wir die Fehlerabschätzung (16).

Abschätzung (15) ist eine leichte Folgerung aus (19).

Es bleibt unklar, ob (15) auch für p>1 gilt.

In [23, 4, 3, 10, 19] sind andere Parameterauswahlen untersucht. T. Raus [23] scheint der erste gewesen zu sein, der in Konvergenzuntersuchungen die Ungleichungen der Art (22), (23) benutzte.

5.7 Abschätzungen für die Potenzen von Operatoren.

Für einen Operator $B = B^* \geq 0$ in einem Hilbertraum gilt die Formel (siehe z.B. [11])

$$(23) \qquad B^\alpha = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1}(tI+B)^{-1} B\,dt \ , \ 0 < \alpha < 1 \ .$$

Übrigens, im Falle des kompakten Operators B ist diese Formel leicht nachprüfbar, weil wegen der Gleichheit

$$\lambda^\alpha = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1}(t+\lambda)^{-1} \lambda\,dt \ , \ 0 < \alpha < 1 \ , \ \lambda \geq 0 \ ,$$

beide Operatoren (B^α und der Operator in der rechten Seite) gleiche Wirkung auf die Eigenelemente von B haben.

Ist $B_h = B_h^* \geq 0$ ein anderer Operator in demselben Hilbertraum, so gilt

$$(24) \quad B_h^\alpha - B^\alpha = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty t^\alpha (tI+B_h)^{-1}(B_h - B)(tI+B)^{-1} dt \ (0 < \alpha < 1)$$

weil

$$(tI+B_h)^{-1} B_h - (tI+B)^{-1} B = [I - t(tI+B_h)^{-1}] - [I - t(tI+B)^{-1}] =$$

$$= -t[(tI+B_h)^{-1} - (tI+B)^{-1}] =$$

$$= -t(tI+B_h)^{-1}[(tI+B) - (tI+B_h)](tI+B)^{-1} =$$

$$= \ t(tI+B_h)^{-1}(B_h - B)(tI+B)^{-1} \ .$$

Lemma 1. Für $B = B^* \geq 0$, $B_h = B_h^* \geq 0$ gilt

$$(25) \qquad \| B_h^p - B^p \| \leq c_p \| B_h - B \|^{\min\{p,1\}} \quad (0 \leq p < \infty) \ ,$$

wobei c_p auf jedes Intervall $[0,p_0]$ beschränkt ist.

Beweis: Bezeichnen wir $\varepsilon_h = \| B_h - B \|$.

Fall $p = \alpha \in (0,1)$, Formel (24). Für $t \geq \varepsilon_h$ benutzen wir die Ungleichungen

$$\| (tI+B_h)^{-1} \| \leq t^{-1} \ , \ \| (tI+B)^{-1} \| \leq t^{-1} \ ,$$

damit

$$\| \int_{\varepsilon_h}^\infty t^\alpha (tI+B_h)^{-1}(B_h - B)(tI+B)^{-1} dt \| \leq \varepsilon_h \int_{\varepsilon_h}^\infty t^{\alpha-2} dt = \frac{\varepsilon_h^\alpha}{1-\alpha} \ .$$

Für $0 < t < \varepsilon_h$ benutzen wir zusätzlich die Ungleichungen

$$\| (tI+B_h)^{-1} B_h \| \leq 1 \ , \ \| B(tI+B)^{-1} \| \leq 1 \ ,$$

damit

$$\| \int_0^{\varepsilon_h} t^\alpha (tI+B_h)^{-1}(B_h - B)(tI+B)^{-1} dt \| \leq 2 \int_0^{\varepsilon_h} t^{\alpha-1} dt = \frac{2\varepsilon_h^\alpha}{\alpha}$$

(eine etwas ausführlichere Überlegung erlaubt hier den Faktor 2 mit 1 zu ersetzen). Als Resultat erhalten wir

$$\| B_h^\alpha - B^\alpha \| \leq \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left(\frac{\varepsilon_h^\alpha}{\alpha} + \frac{\varepsilon_h^\alpha}{1-\alpha} \right) \leq \frac{4}{\pi} \varepsilon_h^\alpha = \frac{4}{\pi} \| B_h - B \|^\alpha \ .$$

Damit ist (25) für $p = \alpha \in (0,1)$ bewiesen.

Im Fall $p = k$ (k natürlich) ist (25) trivial.
Den Fall $p = k + \alpha$ (k natürlich, $\alpha \in (0,1)$) siehe in [33], S. 92.

Folgerung 1. Sei $A \in L(H,F)$, $Q_h \in L(F,F)$ ein Orthoprojektor, $\| (I-Q_h)A \| \leq \eta_h$. Dann gilt

$$\| |Q_h A|^p - |A|^p \| \leq c_p \ \eta_h^{\min\{p,2\}} \quad (0 \leq p < \infty) \ .$$

Beweis: Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\| ((Q_h A)^* Q_h A)^p - (A^* A)^p \| \leq c_{2p} \ \eta_h^{\min\{2p,2\}}$$

und folgt unmittelbar aus (25) mit $B = A^*A$, $B_h = A^*Q_hA$

weil $\| B-B_h \| = \| A^*(I-Q_h)A \| \leq \eta_h^2$.

Folgerung 2. Seien $A \in L(H,F)$, $P_h \in L(H,H)$, $Q_h \in L(F,F)$ Orthoprojektoren, $\| (I-Q_h)A \| \leq \eta_h$. Dann (vgl. (13))

$$\| \, |Q_hAP_h|^p - |AP_h|^p \| \leq c_p \; \eta_h^{\min\{p,2\}} \quad (0 \leq p < \infty) \; .$$

Beweis: Das ist nur eine Umformulierung der Folgerung 1: Operator A ist durch AP_h ersetzt.

Ausgehend von (20), bewies R. Plato [20] die Ungleichung

$$\| P_h |A|^p P_h - |AP_h|^p \| \leq \tfrac{5}{4} \; \xi_h^p \quad (0 \leq p \leq 2) \; .$$

Mit (12) folgerte er hieraus die folgende Aussage.

Lemma 2. Es sei $A \in L(H,F)$ und $P_h \in L(H,H)$ ein Orthoprojektor, $\| A(I-P_h) \| \leq \xi_h$. *Dann*

$$\| \, |AP_h|^p - |A|^p \| \leq c_p \; \xi_h^{\min\{p,1\}} \quad (0 \leq p < \infty) \; .$$

Hieraus folgt auch (14).

6. REGULARISIERUNG DER NICHTKORREKTEN EXTREMALAUFGABEN

6.1 Nichtkorrekte Extremalaufgaben. Eine Extremalaufgabe

$$J(u) \to \min \; , \; u \in U_0 \; ,$$

heißt nichtkorrekt, wenn eine minimisierende Folge $(u_n) \subset U_0$ existiert (mit $J(u_n) \to \inf_{U_0} J(u)$), die keine konvergierenden Teilfolgen hat. In der Regel sind solche Aufgaben auch nichtstabil bezüglich Störungen von Daten, und sie benötigen die Regularisierung um eine stabile Näherungslösung zu finden.

Eine Gleichung $Au = f$ mit einem (im allgemeinen nichtlinearen) Operator $A : E \to F$ zwischen Banachräumen E und F kann als die Extremalaufgabe

$$J(u) := \| Au - f \| \to \min \; , \; u \in U_0 \subseteq E \; ,$$

formuliert werden. Eine Gleichung $Au = f$ mit einem linearen selbstadjungierten Operator $A = A^* \geq 0$ in einem Hilbertraum H kann auch als die Extremalaufgabe

$$J(u) := (Au,u) - (u,f) - (f,u) \to \min \; , \; u \in U_0 \subseteq H \; ,$$

formuliert werden. Hier ist $U_0 \subseteq E$ bzw. $U_0 \subseteq H$ eine Menge, die die genaue Lösung enthält, z.B. $U_0 = E$ bzw. $U_0 = H$. Ist der Operator $A : E \to F$ bzw. $A \in L(H,H)$ kompakt, so sind diese Extremalaufgaben nichtkorrekt.

6.2 L-Räume von Frechet. In der Theorie der Extremalaufgaben benutzt man oft die schwache Konvergenz, manchmal auch die Schwach*-Konvergenz. Das war ein Anlaß, die Aufgabenstellung in allgemeinen topologischen Räumen zu untersuchen. In der Theorie der nichtkorrekten Extremalaufgaben benutzt man andererseits aus der Topologie sehr wenig, man kann alles mit Hilfe von zwei elementären Eigenschaften der konvergierenden Folgen aufbauen. Diese Eigenschaften (1^o und 2^o) sind bekannt als die Axiome der L-Räume (Limes-Räume) von Frechet. Wir werden die Aufgabenstellung in den L-Räumen formulieren.

Zunächst erinnern wir uns an die Definition eines L-Raumes (siehe [12]). Ein L-Raum ist eine beliebige Menge U, in der man eine Klasse von sogenannten τ-konvergierenden Folgen $(u_n) \subset U$ ausgewählt hat, wobei jeder Folge $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ dieser Klasse ein Element $u \in U$, der sogenannte τ-Limes, zugeordnet ist (man schreibt $u_n \xrightarrow{\tau} u$ oder $\tau\text{-}\lim u_n = u$), so daß gilt:

1^o jede stationäre Folge mit $u_n = u$ $(n = 1,2,\dots)$ ist τ-konvergent und $\tau\text{-}\lim u_n = u$;

2^o wenn die Folge (u_n) τ-konvergent ist und $1 < k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ gilt, so ist auch die Teilfolge (u_{k_n}) τ-konvergent und $\tau\text{-}\lim u_{k_n} = \tau\text{-}\lim u_n$.

Eine Folge $(u_n) \subset U$ heißt τ-kompakt, wenn jede Teilfolge (u_{k_n}) eine τ-konvergierende Teil-Teilfolge enthält. Eine Familie $(u_\delta)_{\delta \in (0,\delta_0)}$ heißt τ-kompakt für $\delta \to 0$, wenn jede Folge (u_{δ_n}) mit $\delta_n \to 0$ τ-kompakt ist.

Beispiele. Es sei $U \subseteq E$ eine Menge in einem Banach-Raum E. Als die τ-Konvergenz kann man die folgenden Konvergenzen betrachten:

(a) starke Konvergenz, d.h. $u_n \xrightarrow{\tau} u$, wenn $\|u_n - u\| \to 0$;

(b) schwache Konvergenz, d.h. $u_n \xrightarrow{\tau} u$, wenn $\langle u_n - u, u^* \rangle \to 0$ $\forall u^* \in E^*$;

(c) Schwach*-Konvergenz, d.h. $u_n \xrightarrow{\tau} u$, wenn $\langle {}^*u, u_n - u \rangle \to 0$ $\forall {}^*u \in {}^*E$.

Hier E^* ist der Dualraum von E; im Beispiel (c) ist vorausgesetzt, daß E selbst der Dualraum von einem Banach-Raum ${}^*E$ ist.

6.3 L-Raum mit einem stabilisierenden Funktional.

Es sei U ein L-Raum. Ein Funktional $\Omega : U \to \mathbb{R}$ heißt stabilisierend für U, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\Omega(u) \geq 0 \quad \forall u \in U \quad ;$$

$$u_n \xrightarrow{\tau} u \Rightarrow \Omega(u) \leq \underline{\lim}\, \Omega(u_n) \quad ;$$

$$\Omega(u_n) \leq \text{const} \ (n=1,2,\dots) \Rightarrow (u_n) \text{ ist } \tau\text{-kompakt.}$$

Beispiele.

(a) Sei $U \subseteq E$ eine abgeschlossene kompakte Menge in einem Banachraum E; die τ-Konvergenz bedeute die starke Konvergenz und

$$\Omega(u) = w(\|u\|) ,$$

wo $w : [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine streng wachsende stetige Funktion mit $w(\infty) = \infty$ ist. Es ist klar, daß die drei Bedingungen auf Ω erfüllt sind.

(b) Sei $U \subseteq E$ eine schwach abgeschlossene Menge in einem reflexiven Banach-Raum E; die τ-Konvergenz bedeute die schwache Konvergenz und Ω sei definiert wie im Beispiel (a). Die drei Bedingungen auf Ω sind wieder erfüllt (die dritte Bedingung folgt aus der Eigenschaft der reflexiven Räume: $\|u_n\| \leq \text{const} \Rightarrow (u_n)$ ist schwach kompakt). Hat der Raum E die H-Eigenschaft (Hilbert-Raum-Eigenschaft), d.h.

$$u_n \dashrightarrow u \text{ (schwach)} , \ \|u_n\| \to \|u\| \Rightarrow \|u_n - u\| \to 0 ,$$

so gilt die folgende Aussage:

$$u_n \xrightarrow{\tau} u , \ \Omega(u_n) \to \Omega(u) \Rightarrow \|u_n - u\| \to 0 .$$

(c) Es sei $U = V[a,b]$, $\|u\|_V = |u(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}(u)$ (der Raum der Funktionen mit beschränkter Variation), die τ-Konvergenz bedeute die punktweise Konvergenz auf $[a,b]$, und es sei

$$\Omega(u) = w(\|u\|_V) ,$$

wo $w : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dieselben Eigenschaften habe wie im

Beispiel (a). Die drei Bedingungen auf Ω sind wieder erfüllt (die dritte Bedingung nach dem Satz von Helly). Man kann beweisen, daß in diesem Beispiel

$$u_n \xrightarrow{\tau} u \ , \ \Omega(u_n) \to \Omega(u) \Rightarrow \sup_{a_1 \le t \le b_1} |u_n(t)-u(t)| \to 0 \ ,$$

wo $[a_1,b_1] \subseteq [a,b]$ eine beliebige Strecke ist, auf der die Grenzfunktion u stetig ist.

6.4 Extremalaufgabe. Wir betrachten die Extremalaufgabe

$$J(u) \to \min \ , \ u \in U_0 \subseteq U \ ,$$

wo U ein L-Raum mit einem stabilisierenden Funktional Ω ist. Ohne das stets zu erwähnen, wird immer das Folgende vorausgesetzt:

- die Menge $U_0 \subseteq U$ ist (τ,Ω)-abgeschlossen in dem Sinn, daß

$$U_0 \ni u_n \xrightarrow{\tau} u \ (\in U) \ , \ \Omega(u_n) \le \text{const} \Rightarrow u \in U_0 \ ;$$

- das Funktional $J : U \to \mathbb{R}$ ist auf ganz U erklärt und (τ,Ω)-halbstetig in dem Sinn, daß

$$u_n \xrightarrow{\tau} u \ , \ \Omega(u_n) \le \text{const} \Rightarrow J(u) \le \underline{\lim}\ J(u_n) \ ;$$

- die Aufgabe ist lösbar:

$$J_* := \inf_{U_0} J(u) > -\infty ,$$

$$U_* := \{u_* \in U_0 : J(u_*) = J_*\} \neq \emptyset \ .$$

Es bezeichne

$$\Omega_* = \inf_{U_*} \Omega(u_*)$$

und

$$V_* = \{u_* \in U_* : \Omega(u_*) = \Omega_*\}$$

(die Menge der Ω-normalen Lösungen). Aus unseren Voraussetzungen folgt leicht, daß $V_* \neq \emptyset$. Wir haben J_* und ein $u_* \in V_*$ zu finden.

6.5 Aufgabe mit gestörten Daten. Statt $U_0 \subseteq U$ und $J : U \to \mathbb{R}$ seien $U_\delta \subseteq U$ und $J_\delta : U_\delta \to \mathbb{R}$ gegeben. Diese Näherungsaufgabe sieht damit so aus:

$$J_\delta(u) \to \min \ , \ u \in U_\delta \subseteq U \quad (0 < \delta \le \delta_0) \ .$$

Es wird immer vorausgesetzt, daß

(1) $\quad |J_\delta(u) - J(u)| \le b_1 \delta \Omega(u) \quad \forall u \in U_\delta$;

(2) $\quad \delta_n \to 0 \ , \ U_{\delta_n} \ni u_n \xrightarrow{\tau} u \in U \ , \ \Omega(u_n) \le \text{const} \Rightarrow u \in U_0$;

(3) $\quad J_* \le J(u) + b_2 \delta \Omega(u) \quad \forall u \in U_\delta$;

(4) $\exists v_\delta \in U_\delta \ (0 < \delta \le \delta_0) \ : \ J(v_\delta) \le J_* + b_3 \delta \Omega(v_\delta) \ , \ \overline{\lim}_{\delta \to 0} \Omega(v_\delta) \le \Omega_*$;

(5) $\exists w_\delta \in U_\delta \ (0 < \delta \le \delta_0) \ : \ \overline{\lim}_{\delta \to 0} \Omega(w_\delta) \le \inf_{U_0} \Omega(u) \ , \ J(w_\delta) \le \text{const}$.

Hier sind $b_1 \ge 0$, $b_2 \ge 0$ und $b_3 \ge 0$ Konstanten, die von δ nicht abhängen. Die Bedingungen (2) und (3) bedeuten, daß U_δ kein Element enthält, das "zu entfernt" von U_0 ist. Die Bedingungen (4) und (5) garantieren, daß mindestens ein Element $u_* \in V_*$ und ein Element $w_0 \in W_0$ "gut approximierbar" sind, wobei

$$W_0 = \{w_0 \in U_0 : \Omega(w_0) = \inf_{U_0} \Omega(u)\} \ ;$$

für die Beispiele (a), (b), (c) der Sektion 6.3 mit der zusätzlichen Voraussetzung $U_0 \ni 0$ ist $W_0 = \{0\}$. Wenn $U_\delta \supseteq U_0$ gilt, so sind (4) und (5) mit $v_\delta = u_* \in V_*$, $b_3 = 0$, $w_\delta = w_0 \in W_0$ erfüllt. Wenn $U_\delta \subseteq U_0$, dann sind (2) und (3) mit $b_2 = 0$ erfüllt. Dieser Fall ($U_\delta \subseteq U_0$) tritt z.B. ein, wenn wir wieder die Beispiele (a), (b), (c) der Sektion 6.3 betrachten, wobei $U_0 \subseteq U \subseteq E$ gegeben ist und $U_\delta = U_0 \cap E_\delta$, wobei $E_\delta \subseteq E$ ein endlichdimensio-

naler Teilraum ist. Wir sehen, daß die Bedingungen (1)-(5) es ermöglichen, die Diskretisierung der Extremalaufgabe einzuführen.
Die Bedingung (3) wird in Vasiliev [34] eingeführt. Dort kann man man auch eine ausführliche Analyse der Bedingung (3) für konvexe Extremalaufgaben finden.
Die Beispiele (b) und (c) von Sektion 6.3 zeigen, daß neben der Konvergenz $u_n \xrightarrow{\tau} u_* \in V_*$ auch die Konvergenz $\Omega(u_n) \to \Omega(u_*) = \Omega_*$ nützlich sein kann. Unsere endgültige Aufgabenstellung lautet: Ausgehend von gestörten Daten U_δ und J_δ (statt U_0 und J), finde eine Näherungslösung $u_\delta \in U_\delta$ $(0 < \delta \le \delta_0)$, so daß (u_δ) für $\delta \to 0$ τ-kompakt ist und die τ-Limes-Punkte von (u_δ) zu V_* gehören und $J(u_\delta) \to J_*$, $\Omega(u_\delta) \to \Omega_*$ $(\delta \to 0)$ gilt. Das folgende Lemma zeigt, wie man das erreichen kann.

Lemma 1. Es sei $u_\delta \in U_\delta$ $(0 < \delta \le \delta_0)$ *und*

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\, J_\delta(u_\delta) \le J_* \ , \ \overline{\lim_{\delta\to 0}}\, \Omega(u_\delta) \le \Omega_* \ .$$

Dann ist u_δ *für* $\delta \to 0$ τ*-kompakt, die* τ*-Limes-Punkte gehören zu* V_* *und es gilt*

$$J_\delta(u_\delta) \to J_* \ , \ \Omega(u_\delta) \to \Omega_* \ (\delta \to 0) \ .$$

Beweis: Es ist klar, daß $\Omega(u_\delta) \le \mathrm{const}$ $(\delta \to 0)$. Wegen der dritten Eigenschaft des stabilisierenden Funktionals Ω ist die Familie (u_δ) τ-kompakt für $\delta \to 0$. Es konvergiere $\delta_n \to 0$, $u_{\delta_n} \xrightarrow{\tau} u'$. Dann gilt $u' \in U_0$ (siehe (2)) und

$$J(u') \le \underline{\lim}\, J(u_{\delta_n}) \le \overline{\lim}\, J(u_{\delta_n}) \underset{(1)}{=} \overline{\lim}\, J_{\delta_n}(u_{\delta_n}) \le J_* \ , \ u' \in U_* \ ,$$

sowie

$$\Omega(u') \le \underline{\lim}\, \Omega(u_{\delta_n}) \le \overline{\lim}\, \Omega(u_{\delta_n}) \le \Omega_* \ , \ u' \in V_* \ .$$

Alle Zeichen "≤" müssen hier "=" sein, sonst bekommen wir einen Widerspruch mit den Definitionen von U_* und V_* (z.B.

$J(u') < J_*$). Das bedeutet, daß

$$\lim J(u_{\delta_n}) = \lim J_{\delta_n}(u_{\delta_n}) = J_* \ , \ \lim \Omega(u_{\delta_n}) = \Omega_* \ .$$

Ein indirekter Beweis ermöglicht leicht, dies für (alle) $\delta \to 0$ nachzuweisen.

6.6 Regularisierung. Wir regularisieren unsere Extremalaufgabe mit Hilfe der Tichonowschen Methode:

$$\Phi_\delta^\alpha(u) := J_\delta(u) + \alpha\Omega(u) \to \min \ , \ u \in U_\delta \quad (\alpha > 0) \ .$$

Lemma 2. Wir nehmen an, daß U_δ (τ,Ω)*-abgeschlossen ist* $(U_\delta \ni u_n \xrightarrow{\tau} u \ , \ \Omega(u_n) \le \mathrm{const} \Rightarrow u \in U_\delta)$ *und* J_δ (τ,Ω)*-halbstetig ist* $(U_\delta \ni u_n \xrightarrow{\tau} u \ , \ \Omega(u_n) \le \mathrm{const} \Rightarrow J_\delta(u) \le \underline{\lim}\, J_\delta(u_n))$*. Dann ist die Aufgabe* $\Phi_\delta^\alpha(u) \to \min$, $u \in U_\delta$, *für* $\alpha > (b_1 + b_2)\delta$ *korrekt: jede minimisierende Folge* $(u_n) \subset U_\delta$ *ist* τ*-kompakt, wobei für* τ*-konvergierende Teilfolgen* $u_n \xrightarrow{\tau} u'$ $(n \in N' \subseteq \mathbb{N})$ *gilt:*

$$\Phi_\delta^\alpha(u') = \inf_{U_\delta} \Phi_\delta^\alpha(u) \ ,$$

$$J_\delta(u_n) \to J_\delta(u') \ , \ \Omega(u_n) \to \Omega(u') \quad (n \in N') \ .$$

Beweis siehe [31].

Wir werden dieses Lemma nicht anwenden, und daher ist es für das Folgende gleichgültig, ob seine Voraussetzungen erfüllt sind. Im Folgenden bezeichnet u_δ^α ein beliebiges Element von U_δ, für das

$$\Phi_\delta^\alpha(u_\delta^\alpha) \le \inf_{U_\delta} \Phi_\delta^\alpha(u) + b_4\delta\Omega(u_\delta^\alpha) \ . \tag{6}$$

Hier ist $b_4 \ge 0$ noch eine Konstante, die von δ und α nicht abhängt. Ist die regularisierte Aufgabe genau gelöst, so kann man $b_4 = 0$ setzen.

<u>*Satz 1*</u>*. Es sei* $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ *so gewählt, daß*

$$\alpha(\delta) \to 0 \ , \ \delta/\alpha(\delta) \to 0 \quad (\delta \to 0) \ .$$

Dann ist $(u_\delta^{\alpha(\delta)})$ *τ-kompakt für* $\delta \to 0$*, die τ-Limes-Punkte gehören zu* V_* *und*

$$J_\delta(u_\delta^{\alpha(\delta)}) \to J_* \ , \ \Omega(u_\delta^{\alpha(\delta)}) \to \Omega_* \quad (\delta \to 0) \ .$$

<u>Beweis:</u> Wir haben (siehe (6))

$$\Phi_\delta^\alpha(u_\delta^\alpha) \le \Phi_\delta^\alpha(v_\delta) + b_4\delta\Omega(u_\delta^\alpha) \ ,$$

wo $\inf \Phi_\delta^\alpha(u)$ durch $\Phi_\delta^\alpha(v_\delta)$ ersetzt ist mit $v_\delta \in U_\delta$ aus der Bedingung (4). Das heißt

$$J_\delta(u_\delta^\alpha) + \alpha\Omega(u_\delta^\alpha) \le J_\delta(v_\delta) + \alpha\Omega(v_\delta) + b_4\delta\Omega(u_\delta^\alpha) \ .$$

Hier ist

$$J_\delta(v_\delta) \le J(v_\delta) + |J_\delta(v_\delta) - J(v_\delta)| \underset{(1),(4)}{\le} J_* + (b_1+b_3)\delta\Omega(v_\delta)$$

und unsere Ungleichung nimmt die folgende Form an:

$$J_\delta(u_\delta^\alpha) + (\alpha - b_4\delta)\Omega(u_\delta^\alpha) \le J_* + (\alpha + b_1\delta + b_3\delta)\Omega(v_\delta) \ . \tag{7}$$

Hieraus folgt, daß

$$\overline{\lim_{\alpha \ge b_4\delta, \alpha\to 0, \delta\to 0}} J_\delta(u_\delta^\alpha) \le J_* \ .$$

Insbesondere haben wir für $\alpha = \alpha(\delta) \to 0$, $\delta/\alpha(\delta) \to 0$ $(\delta \to 0)$

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}} J_\delta(u_\delta^{\alpha(\delta)}) \le J_* \ ,$$

d.h. für $u_\delta^{\alpha(\delta)}$ ist die erste Bedingung von Lemma 1 erfüllt. Nun schreiben wir (7) so um:

$$(\alpha - b_4\delta)\Omega(u_\delta^\alpha) \le (\alpha + b_1\delta + b_3\delta)\Omega(v_\delta) + \left[J_* - J(u_\delta^\alpha)\right] + \\ + \left[J(u_\delta^\alpha) - J_\delta(u_\delta^\alpha)\right] \ .$$

Hier ist (siehe (3) und (1))

$$J_* - J(u_\delta^\alpha) \le b_2\delta\Omega(u_\delta^\alpha)) \ , \ |J_\delta(u_\delta^\alpha) - J_\delta(u_\delta^\alpha)| \le b_1\delta\Omega(u_\delta^\alpha) \ ,$$

und die Ungleichung nimmt die folgende Form an:

$$\left[\alpha - (b_1+b_2+b_4)\delta\right]\Omega(u_\delta^\alpha) \le (\alpha + b_1\delta + b_3\delta)\Omega(v_\delta)) \ . \tag{7'}$$

Wir sehen, daß

$$\overline{\lim_{\delta\to 0, \delta/\alpha(\delta)\to 0}} \Omega(u_\delta^{\alpha(\delta)}) \le \overline{\lim_{\delta\to 0}} \Omega(v_\delta) \underset{(4)}{\le} \Omega_* \ ,$$

d.h. auch die zweite Bedingung von Lemma 1 ist erfüllt. Die Behauptungen des Satzes folgen aus dem Lemma 1.

6.7 <u>Abschätzung von J_*</u>.

<u>*Lemma 3*</u>*. Es gilt*

$$J_* + \left[\alpha - (b_1+b_2)\delta\right]\Omega(u_\delta^\alpha) \le \Phi_\delta^\alpha(u_\delta^\alpha) \le J_* + \left[\alpha + (b_1+b_3)\delta\right]\Omega(v_\delta) + b_4\delta\Omega(u_\delta^\alpha) \ .$$

<u>Beweis:</u> Für $u \in U_\delta$ haben wir gemäß (1) und (3)

$$J_\delta(u) \ge J(u) - b_1\delta\Omega(u) \ge J_* - (b_1+b_3)\delta\Omega(u)$$

und damit

$$\Phi_\delta^\alpha(u) = J_\delta(u) + \alpha\Omega(u) \ge J_* + \left[\alpha - (b_1+b_3)\delta\right]\Omega(u) \ .$$

Hieraus folgt die Abschätzung von $\Phi_\delta^\alpha(u_\delta^\alpha)$ nach unten. Die Abschätzung nach oben ist schon bewiesen - das ist (7).

<u>Folgerung 1.</u> Sei β eine Konstante mit $\beta > b_1 + b_2 + b_4$; Wir setzen: $\lambda_\delta = \Phi_\delta^{\beta\delta}(u_\delta^{\beta\delta})$. Dann gilt

$$\lambda_\delta \ge J_* \ , \ \lambda_\delta - J_* = O(\delta) \ . \tag{8}$$

Beweis: Aus (7') folgt, daß

$$\phi_\delta^{\beta\delta}(u_\delta^{\beta\delta}) \le \frac{\beta+b_1+b_3}{\beta-(b_1+b_2+b_4)} \Omega(v_\delta) \le \text{const} \quad (\delta\to 0) .$$

Nun folgen die Behauptungen aus dem Lemma 3.

Wir sehen, daß J_* bei gestörten Daten mit $O(\delta)$-Genauigkeit approximierbar ist. Davon kann man bei der Parameterwahl Gebrauch machen. Dabei ist es wichtig zu wissen, wie sich u_δ^α für große α verhält.

Lemma 4. Die Familie (u_δ^α) ist für $\delta\to 0$, $\alpha\to\infty$ τ-kompakt, die τ-Limes-Punkte gehören zu W_o (Sektion 6.5) und es gilt:

$$\Omega(u_\delta^\alpha) \to \inf_{U_o} \Omega(u) \quad (\delta\to 0, \alpha\to\infty) ,$$

$$\underline{\lim}_{\delta\to 0,\alpha\to\infty} J_\delta(u_\delta^\alpha) \ge \inf_{W_o} J(u) .$$

Beweis: Es gilt (siehe (6) und (5))

$$\phi_\delta^\alpha(u_\delta^\alpha) \le \phi_\delta^\alpha(w_\delta) + b_4\delta\Omega(u_\delta^\alpha) ,$$

d.h.

$$J_\delta(u_\delta^\alpha) + \alpha\Omega(u_\delta^\alpha) \le J_\delta(w_\delta) + \alpha\Omega(w_\delta) + b_4\delta\Omega(u_\delta^\alpha)$$

und

$$\alpha\Omega(u_\delta^\alpha) \le \alpha\Omega(w_\delta) + J_\delta(w_\delta) + \left[J(u_\delta^\alpha) - J_\delta(u_\delta^\alpha)\right] +$$

$$+ \left[J_* - J(u_\delta^\alpha)\right] - J_* + b_4\delta\Omega(u_\delta^\alpha) .$$

Mit Hilfe von (1), (3) und (5) erhalten wir hieraus

$$\overline{\lim}_{\delta\to 0,\alpha\to\infty} \Omega(u_\delta^\alpha) \le \overline{\lim}_{\delta\to 0} \Omega(w_\delta) \le \inf_{U_o} \Omega(u) .$$

Hieraus folgt die τ-Kompaktheit von (u_δ^α) für $\delta\to 0$, $\alpha\to\infty$; sei $\delta_n\to 0$, $\alpha_n\to\infty$, $u_{\delta_n}^{\alpha_n} \xrightarrow{\tau} u_o$, dann ist $u_o\in U_o$ und

$$\Omega(u_o) \le \underline{\lim}\, \Omega(u_{\delta_n}^{\alpha_n}) \le \overline{\lim}\, \Omega(u_{\delta_n}^{\alpha_n}) \le \inf_{U_o} \Omega(u) ,$$

d.h. $u_o\in W_o$ und die Ungleichungen "$\le$" sind Gleichungen "=":

$$\lim \Omega(u_{\delta_n}^{\alpha_n}) = \inf_{U_o} \Omega(u) .$$

Es ist auch klar, daß

$$\inf_{W_o} J(u) \le J(u_o) \le \underline{\lim}\, J(u_{\delta_n}^{\alpha_n}) = \underline{\lim}\, J_{\delta_n}(u_{\delta_n}^{\alpha_n}) .$$

Folgerung 2. Es sei

(9) $$J_* := \inf_{U_o} J(u) < \inf_{W_o} J(u) .$$

Für $\beta > b_1 + b_2 + b_4$ und $b = \text{const}$ existieren dann ein $\delta_{\beta,b} > 0$ und ein $\alpha_{\beta,b} > 0$, so daß für $\delta < \delta_{\beta,b}$ und $\alpha > \alpha_{\beta,b}$ gilt

$$J_\delta(u_\delta^\alpha) > \lambda_\delta + b\delta\Omega(u_\delta^\alpha) .$$

Beweis: folgt aus (8) und Lemma 4.

Es ist klar, daß $J_* \le \inf_{W_o} J(u)$. Gilt hier die Gleichheit, so ist $V_*\cap W_o \ne \emptyset$ und unsere Extremalaufgabe

$$J(u)\to\min , \ u\in U_o , \ \Omega(u)\to\min ,$$

ist äquivalent zu der einfacheren Aufgabe

$$J(u)\to\min , \ u\in W_o .$$

In Beispiel (c) und in den Beispielen (a) und (b) in Sektion 6.3 ist $W_o = \{0\}$ und die letzte Aufgabe ist trivial. Also ist die Bedingung (9) ganz natürlich.

6.8 Parameterauswahl ("Diskrepanzprinzip"). Wir geben drei Konstanten vor:

$$\beta > b_1 + b_2 + b_4 \ , \ b > b_1 + b_3 + b_4 \ , \ c > 1 \ ;$$

wir berechnen $u_\delta^{\beta\delta}$ (siehe (6)), $\lambda_\delta = \Phi_\delta^{\beta\delta}(u_\delta^{\beta\delta})$ und wählen ein beliebiges $\alpha = \alpha(\delta) \geq \beta\delta$, für das ein $\alpha' \in [\alpha, c\alpha]$ existiert, so daß

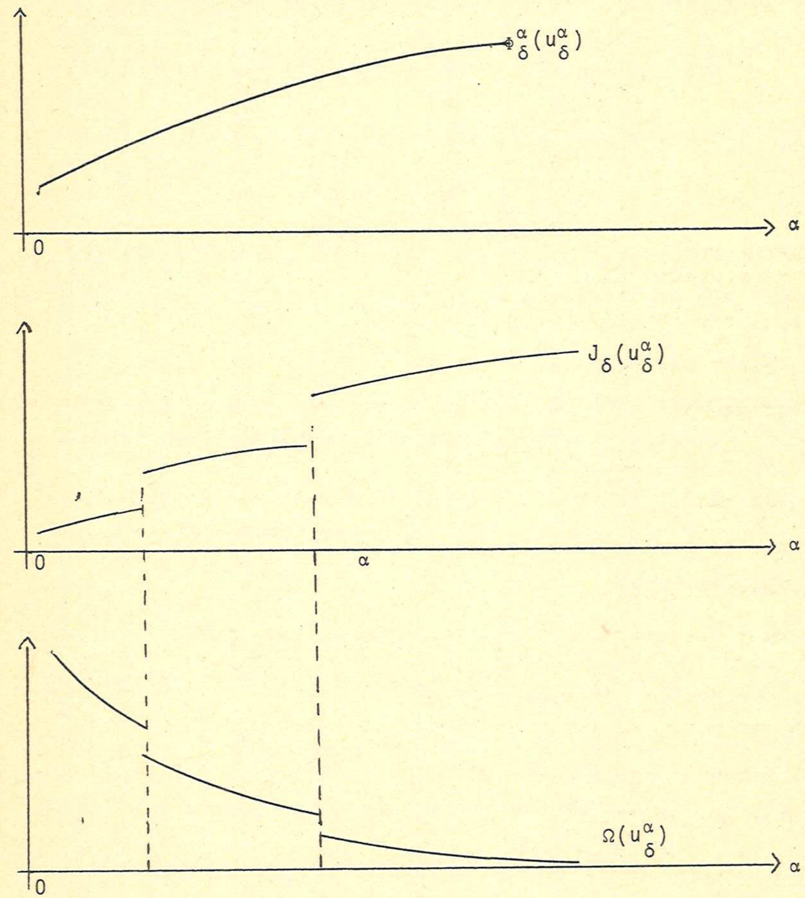
$$(10) \qquad J_\delta(u_\delta^\alpha) \leq \lambda_\delta + b\delta\Omega(u_\delta^\alpha) \ ,$$

$$(10') \qquad J_\delta(u_\delta^{\alpha'}) \geq \lambda_\delta + b\delta\Omega(u_\delta^{\alpha'}) \ .$$

Dabei nehmen wir an, daß ein Algorithmus zur Verfügung steht, der für alle $\alpha \geq \beta\delta$ das Funktional Φ_δ^α auf U_δ mit Genauigkeit (6) minimiert. Welches $u_\delta^\alpha \in U_\delta$ dieser Algorithmus bestimmt, ist nicht wichtig, nur (6) muß erfüllt sein.
Für $\alpha = \beta\delta$ ist (10) erfüllt, für genügend große α' und genügend kleine δ ist (10') erfüllt (siehe Folgerung 2).
Unsere Parameterauswahlregel liefert ein "fast maximales" α, für das (10) erfüllt bleibt. Man kann $\alpha = \alpha(\delta)$ iterativ bestimmen: berechnen wir $u_\delta^{\alpha_k}$ $(k=0,1,\dots,k_\delta+1)$ für $\alpha_0 = \beta\delta$, $\alpha_k = c\alpha_{k-1}$ $(k=1,2,\dots)$, wobei k_δ die letzte Zahl ist, so daß für $\alpha = \alpha_k$ $(k=1,\dots,k_\delta)$ noch (10) gilt und für $\alpha' = \alpha_{k_\delta+1}$ (10') gilt. Dann genügen $\alpha = \alpha_{k_\delta}$ und $\alpha' = \alpha_{k_\delta+1}$ den Bedingungen der Regel.

Bemerkung 1. Im Falle $b_4 = 0$ (genaue Minimisierung von Φ_δ^α) gibt es ein $\bar{\alpha}_\delta$, so daß für $\alpha < \bar{\alpha}_\delta$ (10) und für $\alpha' > \bar{\alpha}_\delta$ (10') erfüllt ist. Im Falle $b_4 > 0$ ist dieser Grenzwert nicht "eindeutig".

Bemerkung 2. Im Falle $b_4 = 0$ sind $J_\delta(u_\delta^\alpha)$, $\Omega(u_\delta^\alpha)$ und $\Phi_\delta^\alpha(u_\delta^\alpha)$ monotone Funktionen von α (siehe die Zeichnung), wobei $\Phi_\delta^\alpha(u_\delta^\alpha)$ auch stetig ist (siehe z.B. [14]). Im Falle $b_4 > 0$ ist auch das "verschmutzt".



Eine ziemlich komplizierte Parameterauswahlregel im Falle $b_4 = 0$ wird in Leonov [13] angegeben.

6.9 Hauptresultat.

Satz 2. *Es sei die Bedingung (9) erfüllt und es sei* $\alpha=\alpha(\delta)$ *gemäß der Auswahlregel von Sektion 6.8 gewählt. Dann ist* $(u_\delta^{\alpha(\delta)})$ τ*-kompakt für* $\delta\to 0$*, die* τ*-Limes-Punkte gehören zu* V_* *und es gilt*

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)}\to 0\ ,\quad J_\delta(u_\delta^{\alpha(\delta)})\to J_*\ ,\quad \Omega(u_\delta^{\alpha(\delta)})\to\Omega_*\quad(\delta\to 0)\ .$$

Beweis: Aus (10) und (8) folgt, daß

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\ J_\delta(u_\delta^{\alpha(\delta)})\le J_*\ .$$

a) Fall $\alpha(\delta_n)\ge\alpha_*>0$, $\delta_n\to 0$. Aus (7') und (4) folgt dann, daß $\overline{\lim}\ \Omega(u_{\delta_n}^{\alpha(\delta_n)})\le\Omega_*$. Aus Lemma 1 folgen die Behauptungen des Satzes.

b) Hauptfall: $\alpha(\delta)\to 0$ $(\delta\to 0)$; dann gilt auch $\alpha'(\delta)\to 0$ $(\delta\to 0)$ mit α' aus der Parameterauswahlregel. Gemäß (10') und (8) haben wir

$$J_\delta(u_\delta^{\alpha'})\ge\lambda_\delta+b\delta\Omega(u_\delta^{\alpha'})\ge J_*+b\delta\Omega(u_\delta^{\alpha'})\ ,$$

deshalb folgt

$$\Phi_\delta^{\alpha'}(u_\delta^{\alpha'})\ge J_*+(\alpha'+b\delta)\Omega(u_\delta^{\alpha'})\ .$$

Andererseits gilt nach (6)

$$\Phi_\delta^{\alpha'}(u_\delta^{\alpha'})\le\Phi_\delta^{\alpha'}(v_\delta)+b_4\delta\Omega(u_\delta^{\alpha'})$$

mit $v_\delta\in U_\delta$ aus der Bedingung (4). Folglich ist

$$J_*+(\alpha'+b\delta)\Omega(u_\delta^{\alpha'})\le J_\delta(v_\delta)+\alpha'\Omega(v_\delta)+b_4\delta\Omega(u_\delta^{\alpha'})\ ,$$

also

$$(\alpha'+b\delta-b_4\delta)\Omega(u_\delta^{\alpha'})\le J_\delta(v_\delta)-J_*+\alpha'\Omega(v_\delta)\ .$$

Weil nach (1) und (4) $J_\delta(v_\delta)-J_*\le(b_1+b_3)\delta\Omega(v_\delta)$, nimmt unsere Ungleichung die Form an:

$$(\alpha'+b\delta-b_4\delta)\Omega(u_\delta^{\alpha'})\le(\alpha'+b_1\delta+b_3\delta)\Omega(v_\delta)\ . \tag{11}$$

Weil $b-b_4>b_1+b_3$ (siehe die Bedingung auf b), gilt

$$\Omega(u_\delta^{\alpha'})\le\Omega(v_\delta)\ ,\quad \overline{\lim_{\delta\to 0}}\ \Omega(u_\delta^{\alpha'(\delta)})\le\Omega_*$$

(siehe (4)). Außerdem ist es wie im Beweis des Satzes 1 leicht nachprüfbar, daß

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\ J_\delta(u_\delta^{\alpha'(\delta)})\le J_*\ .$$

Nach Lemma 1

$$\Omega(u_\delta^{\alpha'(\delta)})\to\Omega_*\quad(\delta\to 0)\ .$$

Wir bemerken, daß $\Omega_*>0$, weil im Falle $\Omega_*=0$ die Menge $V_*\cap W_0$ nicht leer und $\inf\limits_{W_0} J(u)\le J_*$ ist, was der Bedingung (9) widerspricht. Wir schreiben die Ungleichung (11) um in die Form

$$(b-b_1-b_3-b_4)\delta\Omega(u_\delta^{\alpha'})\le(\alpha'+b_1\delta+b_3\delta)\left[\Omega(v_\delta)-\Omega(u_\delta^{\alpha'})\right]\ .$$

Hieraus folgt

$$\frac{\delta}{\alpha'(\delta)+b_1\delta+b_3\delta}\ \Omega(u_\delta^{\alpha'})\le\frac{1}{b-b_1-b_3-b_4}\left[\Omega(v_\delta)-\Omega(u_\delta^{\alpha'})\right]\to 0\quad(\delta\to 0)\ ,$$

und das ist nur möglich, wenn $\delta/\alpha'(\delta)\to 0$ $(\delta\to 0)$. Folglich gilt auch $\delta/\alpha(\delta)\to 0$ $(\delta\to 0)$. Die anderen Behauptungen des Satzes 2 folgen nun aus dem Satz 1.

Bemerkung 3. Falls J_* bekannt ist, kann man die Regel der Parameterauswahl vereinfachen: wir geben die Konstanten $b>b_1+b_3+b_4$ und $c>1$ vor und wählen ein beliebiges $\alpha=\alpha(\delta)>0$ so daß, mit einem $\alpha'\in[\alpha,c\alpha]$,

$$J_\delta(u_\delta^\alpha) \leq J_* + b\delta\Omega(u_\delta^\alpha) \quad ,$$

$$J_\delta(u_\delta^{\alpha'}) \geq J_* + b\delta\Omega(u_\delta^{\alpha'}) \; .$$

Satz 2 bleibt gültig.

6.10 Anwendungen für nichtlineare Gleichungen.

Wir betrachten die Gleichung

(12) $$Au = f \;,\; A : E \to F \;,$$

wo E und F Banach-Räume sind. Die Quasilösungen dieser Gleichung auf einer Menge $U \subseteq E$ sind die Extremalen der Aufgabe

$$J(u) := \| Au-f\| \to \min \;,\; u \in U \; .$$

Statt $f \in F$ und $A : E \to F$ seien $f_\delta \in F$ und $A_\delta : E \to F$ gegeben mit

$$\| f_\delta - f\| \leq \delta \;,\; \| A_\delta u - Au\| \leq \delta w(\| u\|) \quad \forall u \in U \;,$$

wobei $w : [0,\infty) \to [0,\infty)$ stetig und streng wachsend sei mit $w(\infty) = \infty$. Für $J_\delta(u) = \| A_\delta u - f_\delta\|$ haben wir

$$|J_\delta(u) - J(u)| \leq \delta\Omega(u) \quad \forall u \in E$$

mit

$$\Omega(u) = 1 + w(\| u\|) \; .$$

Dieses Funktional ist in verschiedenen Fällen stabilisierend für $U \subseteq E$ - siehe die Beispiele (a), (b) und (c) in Sektion 6.3. Eine entsprechende Bedeutung hat die Bedingung von Sektion 6.4 für die (τ,Ω)-Halbstetigkeit von J, z.B. muß im Fall (a) mit kompaktem $U \subset E$ $A : E \to F$ stetig (bezüglich der starken Konvergenz in E und F) sein; im Fall (b) mit schwach abgeschlossenem $U \subseteq E$ muß $A : E \to F$ stetig bezüglich der schwachen Konvergenz in E und F sein usw. Der Einfachheit halber sei $U_0 = U_\delta = U \subseteq E$. Dann sind die Bedingungen (2)-(5) trivialerweise mit $b_2 = b_3 = 0$ erfüllt. Unsere letzte

Ungleichung ist die Bedingung (1) mit $b_1 = 1$. Für die Tichonowsche Methode

$$\| A_\delta u - f_\delta\| + \alpha(1 + w(\| u\|)) \to \min \;,\; u \in U_0 \;,$$

kann man nun die Parameterauswahlregel von Sektion 6.8 konkretisieren und die Sätze 1 und 2 anwenden. Wir bekommen in den Fällen (a), (b), (c) verschiedene Konvergenzaussagen für verschiedene Bedingungen an U und A). Hat E die H-Eigenschaft, so bekommen wir auch im Fall (b) starke Konvergenz von $u_\delta^{\alpha(\delta)}$ $(\delta \to 0)$.

6.11 Anwendung auf die Lawrentiew-Methode.

Wir betrachten die lineare Gleichung

(12) $$Au = f \;,\; A \in L(H,H) \;,\; A = A^* \geq 0 \;,\; f \in R(A) \;,$$

wo H ein Hilbertraum ist. Die Lösungen von (12) minimisieren das Funktional

$$J(u) := (Au,u) - (u,f) - (f,u) \;,\; u \in H \; .$$

Statt $f \in R(A)$ und $A \in L(H,H)$ seien $f_\delta \in H$ und $A_\delta \in L(H,H)$ gegeben mit

$$\| f_\delta - f\| \leq \delta,\; A_\delta = A_\delta^* \;,\; \| A_\delta - A\| \leq \delta \; .$$

Für $J_\delta(u) = (A_\delta u,u) - (u,f_\delta) - (f_\delta,u)$ haben wir

$$|J_\delta(u) - J(u)| \leq \delta\| u\|^2 + 2\delta\| u\| \leq \delta\Omega(u) \;,\; u \in H \;,$$

mit

$$\Omega(u) = 2\| u\|^2 + 1 \; .$$

Dieses Funktional ist stabilisierend für $U = H$ bezüglich der schwachen Konvergenz. Wir sehen, daß mit $U_0 = U_\delta = U = H$ für J und J_δ alle Bedingungen der Sektionen 6.4 und 6.5 erfüllt sind, wobei in (1)-(5) $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = 0$. Die regularisierte Extremalaufgabe sieht so aus:

$$\Phi_\delta^\alpha(u) : (A_\delta u,u) - (u,f_\delta) - (f_\delta,u) + \alpha(2\|u\|^2 + 1) \to \min\ , \quad u \in H.$$

Wir lösen diese Aufgabe genau, d.h. $b_4 = 0$ in (6). Die Ableitung von Φ_δ^α ist für die Extremale Null, und das bedeutet, daß

$$A_\delta u + 2\alpha u = f_\delta$$

(Lawrentiew-Methode für die Gleichung (12)!)
Die Parameterauswahlregel von Sektion 6.8 nimmt die folgende Form an: Wir geben Konstanten $b > 1$, $\beta > 1$, $c > 1$ vor; wir berechnen $u_\delta^\alpha = (2\alpha I + A_\delta)^{-1} f_\delta$ für $\alpha = \beta\delta$ und $\lambda_\delta = \Phi_\delta^{\beta\delta}(u_\delta^{\beta\delta})$ und wählen ein beliebiges $\alpha \geq \beta\delta$, so daß mit einem $\alpha' \in [\alpha, c\alpha]$ die Ungleichungen

$$J_\delta(u_\delta^\alpha) \leq \lambda_\delta + b\delta(2\|u_\delta^\alpha\|^2 + 1)\ ,$$

$$J_\delta(u_\delta^{\alpha'}) \geq \lambda_\delta + b\delta(2\|u_\delta^{\alpha'}\|^2 + 1)$$

gelten. Nach Satz 2 gilt: $u_\delta^{\alpha(\delta)} \dashrightarrow u_*$, $\Omega(u_\delta^{\alpha(\delta)}) \to \Omega_*$ $\Omega(\delta \to 0)$.
Dank der H-Eigenschaft folgt hieraus, daß $\|u_\delta^{\alpha(\delta)} - u_*\| \to 0$ $(\delta \to 0)$.
Hier ist u_* die normale Lösung von (12). Die Bedingung (9) bedeutet in diesem Beispiel, daß 0 keine Lösung von (12) ist, d.h. $f \neq 0$.

LITERATURE

1. H. Brakhage. On ill-posed problems and the method of conjugate gradients. In: Inverse and Ill-Posed Problems, edit. H.W. Engl, G.W. Groetsch (Academic Press, 1987), 165-175.
2. I.V. Emelin, M.A. Krasnoselski. On the theory of ill-posed problems. Soviet Math. Dokl. 20 No 1 (1979), 105-109.
3. H.W. Engl, H. Gfrerer. A posteriori parameter choice for generalized regularization methods for solving linear ill-posed problems. Applied Numerical Mathematics 4 (1988), 395-417.
4. H. Gfrerer. An a posteriori parameter choice for ordinary and iterated Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rate. Math. Comp. 49 (1987), 507-522, S5-S12.
5. G.W. Groetsch. The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind (Pitman, Boston, 1984).
6. U. Hämarik. Residue principle for choice of dimension solving ill-posed problems by projection methods (russian). Uch. Zap. Tartu Gos. Univ. 672 (1984), 27-34.
7. V.K. Ivanov. Approximate solution of operator equations of the first kind. U.S.S.R. comp. Maths. Mat. Phys. 6 No 6 (1966), 197-205.
8. V.K. Ivanov, V.V. Vasin, V.P. Tanana. Theory of linear ill-posed problems (Nauka, Moscow, 1978, russian).
9. T. Kiho. Optimal choice of the parameter in the iterated versions of the Lavrentiev method on the source classes of solutions (russian). Uch. Zap. Tartu Gos. Univ. 833 (1988), 97-106.

10. J.T. King, A. Neubauer. A variant of finite-dimensional Tikhonov regularization with a posteriori parameter choice. Computing 40 (1988), 91-109.

11. M.A. Krasnoselski et al. Integral Operators in Spaces of Summable Functions (Noordjoff Int. Publ., Leydem, 1976).

12. Kuratowski. Topology, Vol. 1 (Academic Press, New York, 1966).

13. A.S. Leonov. On some algorithms for solving ill-posed extremal problems. Math. USSR Sbornik 57 No 1-2 (1987), 229-242.

14. O.A. Liskovez. Variational Methods for Solving unstable Problems (Nauka i Technika, Minsk, 1981, russian).

15. A.K. Louis. Inverse und schlecht gestellte Probleme (Teubner, Stuttgart, 1989).

16. A.A. Melkmann, C.A. Micchelli. Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data. SIAM J. Numer. Anal. 16 No 1 (1979), 87-105.

17. V.A. Morozov. On the solution of functional equations by the methods of regularization. Soviet Math. Doklady 7 (1966), 414-417.

18. F. Natterer. Regularisierung schlecht gestellter Probleme durch Projektionsverfahren. Numer. Anal. 28 No 3 (1977), 511-522.

19. A. Neubauer. An a posteriori parameter choice for Tikhonov regularization in the presence of modeling error. Applied Numerical Mathematics 4 (1988), 507-519.

20. R. Plato. Discretization and regularization of ill-posed problems (submitted).

21. R. Plato, G. Vainikko. On the regularization of the Ritz-Galerkin method for solving ill-posed problems Numer. Math. 57 (1990), 63-79.

22. R. Plato, G. Vainikko. On the regularization of projection methods for solving ill-posed problems. Uch. Zap. Tartu Univ. 863 (1989), 3-18.

23. T. Raus. On the discrepancy principle for the solution of ill-posed problems (russian). Uch. Zap. Tartu Gos. Univ. 672 (1984), 16-26.

24. L. Sarv. Two-step α-processes and their application for solving ill-posed problems (russian). Uch. Zap. Tartu Gos. Univ. 633 (1983), 41-49.

25. E. Schock. Comparison Principles for Iterative Methods. In: Inverse and Ill-Posed Problems, edit. H.W. Engl, G.W. Groetsch (Academic Press, 1987), 185-193.

26. A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin. Solution of Ill-Posed Problems (Wiley, New York, 1977).

27. G.M. Vainikko. The discrepancy principle for a class of regularization methods. U.S.S.R. Comput. Math. Phys. 22 No 3 (1982), 1-19.

28. G.M. Vainikko. The critical level of discrepancy in regularization methods. U.S.S.R. Comput. Math. Phys. 23 No 6 (1983), 1-9.

29. G. Vainikko. On the optimality of methods for ill-posed problems. Z. für Anal. und ihre Anwendung 6 No 4 (1987), 351-362.

30. G. Vainikko. On the optimality of regularization methods. In: Inverse and Ill-Posed Problems, edit. H.W. Engl, G.W. Groetsch (Academic Press, 1987), 77-95.

31. G. Vainikko. On the regularization of ill-posed extremal problems. In: Numerical Methods and Optimization (Valgus, Tallinn, 1988, russian), 56-65.

32. G.M. Vainikko, U.A. Khyamarik. Projection methods and self-regularization in ill-posed problems. Soviet Mathematics (Iz. VUZ) 29 No 10 (1985), 1-20.

33. G.M. Vainikko, A. Yu. Veretennikov. Iterative Procedures in Ill-Posed Problems (Nauka, Moscow, 1986, russian).

34. F.P. Vasiliev. Methods of Solving Extremal Problems (Nauka, Moscow, 1981, russian).

35. V.V. Vasin. Iterative methods for the approximate solution of ill-posed problems with a priori information and their application. In: Inverse and Ill-Posed Problems, edit. H.W. Engl, G.W. Groetsch (Academic Press, 1987), 211-229.

36. W.L. Wendland. Boundary element methods and their asymptotic convergence. In: Theoretical Acoustic and Numerical Techniques, edit. P. Phillipi (Wien - New York, 1983), 135-216.